VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Analýza lineárních diferenciálních rovnic s náhodnými vstupy.

Analysis of linear differential equations with random inputs.

2009

Michala Drozdová

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 7. května 2009 ....

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá analýzou lineárních diferenciálních rovnic s náhodnými vstupy ve speciálním tvaru. Ve zmíněném kontextu jsou tak zkoumány číselné charakteristiky odpovídajících stochastických procesů. Problematika je prakticky demonstrována v aplikaci, jenž je zaměřena na sériový RLC obvod, kde je možné si díky uživatelskému rozhraní vlastní volbou parametrů vše vyzkoušet a prohlédnout si vypočtené charakteristiky. V práci je obsažena potřebná teorie vztahující se k obecnému základu teorie pravděpodobnosti, teorii stochastických procesů a lineárních diferenciálních rovnic. Součástí práce je i názorný příklad, na němž jsou veškeré postupy ukázány.

Klíčová slova: náhodná veličina; střední hodnota; rozptyl; kovariance; autokorelační funkce; pravděpodobnostní prostor; stochastický proces; lineární diferenciální rovnice

Abstract

This Bachelor thesis is about analysis of linear differential equations with random inputs. With this fundamental idea is closely connected investigation of stochastic processes and their numeric characteristics. Already mentioned problems are practically demonstrated in application which is focused on serial RLC circuit. Application has user interface that enables user to change parameters and see the results. In the thesis there are all needed mathematical definitions and theorems for the probability theory, theory of stochastic processes and linear differential equations. Inside the thesis there is also example on which all procedures are shown.

Keywords: random variable; mean; variance; covariance; autocorrelation; probability space; stochastic process; linear differential equations

Seznam použitých zkratek a symbolů

E(X)	–	střední hodnota náhodné veličiny X
D(X)	–	rozptyl náhodné veličiny X
C(X,Y)	–	kovariance mezi náhodnými veličinami X a Y
E_X	–	střední hodnota náhodného procesu X
D_X	–	rozptyl náhodného procesu X
C_X	–	autokorelační funkce náhodného procesu
RLC	–	rezonanční obvod
R	–	elektrický odpor
L	–	indukčnost cívky
C	–	kapacita kondenzátoru
ODR	–	obyčejná diferenciální rovnice
ψ_p	–	partikulární řešení ODR

Obsah

1 Úvod **4**

2 Náhodné veličiny **6**
2.1 Jev a pravděpodobnost jevu 6
2.2 Náhodná veličina 6

3 Charakteristiky náhodných veličin **9**
3.1 Rovnoměrné a Gaussovo rozdělení náhodné veličiny 10

4 Náhodné procesy **14**
4.1 Náhodný proces 14
4.2 Rozklad náhodného procesu 16
4.3 Charakteristiky náhodného procesu 19

5 Lineární transformace **23**
5.1 Deterministický model 23
5.2 Stochastický model 23

6 Aplikace **25**
6.1 RLC obvod 25
6.2 Odvození diferenciální rovnice 25
6.3 Pravá strana rovnice 26
6.4 Počáteční podmínky 27
6.5 Vstupní charakteristiky 27
6.6 Výstupní charakteristiky 28
6.7 Porovnání výsledků 28

7 Závěr **35**

8 Literatura **36**

Přílohy **36**

A Uživatelská příručka **37**
A.1 Vstupní parametry obvodu 37
A.2 Náhodné poruchy 37
A.3 Vstupní charakteristiky 38
A.4 Výstupní charakteristiky 38
A.5 Rotace 39
A.6 Ovládací tlačítka 39
A.7 Varovná upozornění 40

B Lebesgueův - Stieltjesův integrál **42**
B.1 Množinové funkce 42
B.2 Konstrukce měr v $\mathbb{R}^n$ 43
B.3 Měřitelné prostory 48
B.4 Měřitelné funkce 48
B.5 Jednoduché funkce 49
B.6 Lebesgueův-Stieltjesův integrál 50
B.7 Lebesgueův a Riemannův integrál 54

C Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu **55**
C.1 Základní pojmy a věta o existenci řešení 55
C.2 Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty 57
C.3 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty 59

Seznam obrázků

1 Rovnoměrné rozložení náhodné veličiny na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ 10
2 Graf distribuční funkce náhodné veličiny 11
3 Křivka normálního rozložení 12
4 Gaussovy křivky I. 13
5 Gaussovy křivky II. 13
6 Funkce $X_{(F,S)}$ 15
7 Funkce $X_{(S,S)}$ 16
8 $G(\omega) = 1,\ X_\omega(t) = \sin t$ 17
9 $G(\omega) = 1,\ X_\omega(t) = 0.3 \sin t$ 17
10 Obvod se dvěma rezistory a dvěma zdroji napětí 18
11 Transformace - deterministický model 23
12 Transformace - stochastický model 23
13 Sériový RLC obvod 25
14 Střední hodnota výstup 29
15 Rozptyl výstupu 29
16 Autokorelační funkce výstupu 30
17 Střední hodnota zobrazená na základě předchozích výpočtů 32
18 Rozptyl zobrazená na základě předchozích výpočtů 34
19 Autokorelační funkce zobrazená na základě předchozích výpočtů 34
20 Panel vstupních parametrů 37
21 Panel náhodných poruch 38
22 Panel vstupních charakteristik 39
23 Panel výstupních charakteristik 39
24 Ikona rotace 40
25 Ovládací tlačítka 40
26 Varovná hláška 40
27 Reakce aplikace na nesprávné vstupy 41
28 Oprava chybných vstupů 41

1 Úvod

V inženýrské praxi existuje mnoho systémů, které lze úspěšně modelovat lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = \sum_{l=1}^{m} b_l x^{(m-l)}.$$

Ukazuje se, že při předem pevně stanovených počátečních podmínkách existuje lineární operátor L, který deterministické funkci vstupu $x = x(t)$ do systému přiřadí právě jeden deterministický výstup $Y = L\{X\}$. Základní vlastnosti operátoru L jsou vlastně vysvětlovány již v základních matematických kurzech bakalářského studia na technických vysokých školách - většinou se popisuje odpovídající algoritmus vedoucí k řešení zjednodušené rovnice tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = x(t).$$

Připomeňme, že operátor L je lineárním operátorem na vhodném prostoru funkcí. Při studiu reálných systémů však často dochází k případu, že vstup x so soustavy nemá deterministický charakter.

V této práci je popsáno, jak linearita operátoru L umožňuje popsat některé charakteristiky náhodných procesů na výstupu v závislosti na charakteristikách stochastického vstupu. V práci se omezíme na náhodné vstupy ve tvaru lineární kombinace deterministických funkcí, přičemž koeficienty této lineární kombinace budou představovány na čase nezávislými náhodnými veličinami. Zmíněné zjednodušení umožňuje studovat charakter chování odezvy bez hlubokých znalostí z oblasti matematické analýzy a teorie pravděpodobnosti.

Je zřejmé, že za výše popsaných předpokladů nebudeme schopni popsat obecnější situaci - transformaci stacionárního náhodného procesu stacionárním lineárním systémem. Závěry teorie, která popisuje tento obecnější případ, bývají běžnou součástí výuky inženýrského studia. Výklad je však často založen na inženýrské intuici a zkušenostech získaných například simulacemi různých experimentů, popřípadě mechanické aplikaci různých vzorců z oblasti integrálních transformací.

Hlavním cílem této práce je tedy podat takový výklad ve kterém je zachována určitá úroveň matematické korektnosti a zároveň je akceptován stupeň matematické erudice potenciálního čtenáře - studenta druhého nebo třetího ročníku vysoké školy technického zaměření. Výklad je doplněn studiem sériového RLC obvodu, včetně přiloženého simulačního softwaru, realizovaném jazyce MATLAB.

Pro pohodlí čtenáře jsou na počátku práce připomenuty potřebné pojmy a výsledky z teorie pravděpodobnosti. Řadu definic a výsledků této teorie lze jednoduše formulovat za předpokladu použitých výsledků z teorie míry a teorie Lebesgueova - Stieltjesova integrálu. Pro zájemce je proto v příloze B uveden stručný nástin dané problematiky.

Jádro práce je obsaženo ve čtvrté a páté části. Nejprve je popsáno, jak se mění některé charakteristiky stochastického náhodného vstupu v případě aplikace obecného lineárního operátoru. Pak je popsána implementace na případ lineární diferenciální rovnice druhého řádu v kontextu sériového RLC obvodu.

Stručný manuál k přiloženému programu je popsán v příloze A. Připomenutí algoritmů řešení lineárních diferenciálních rovnic je potom obsaženo v poslední příloze.

2 Náhodné veličiny

Hlavním cílem této kapitoly, v níž budou uvedeny některé základní pojmy z teorie pravděpodobnosti, je ucelení terminologie, která bude nadále v této práci používána.

2.1 Jev a pravděpodobnost jevu

Teorie pravděpodobnosti je postavena na pojmu množiny všech možných „základních“ výsledků daného náhodného pokusu. Takovouto množinu obvykle značíme Ω a nazýváme ji množinou elementárních jevů. Množina Ω může obsahovat konečný, spočetný nebo i nespočetný počet elementárních jevů.

Definice 2.1 *Nechť je $\mathcal{S}$ systém podmnožin množiny Ω. Má-li $\mathcal{S}$ následující vlastnosti:*

1. $\Omega \in \mathcal{S}$,
2. *jestliže jevy* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S}$, *tak* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$,
3. *jestliže jevy* $A, B \in \mathcal{S}$, *tak* $A - B \in \mathcal{S}$,

pak $\mathcal{S}$ nazveme systémem náhodých jevů.
Nechť je dán systém náhodných jevů $\mathcal{S}$. Nechť pak reálná funkce P, definovaná na tomto systému, má následují vlastnosti:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $\forall A \in \mathcal{S} : P(A) \geq 0$,
3. *jestliže* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S}$ *a pro každé* $i \neq j$ *je* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *pak* $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Pak P nazýváme pravděpodobností na $\mathcal{S}$ a trojici $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ říkáme pravděpodobnostní prostor.

Poznámka 2.1 Z hlediska teorie míry je tedy pravděpodobností P každá míra $P : \mathcal{S} \to \langle 0, 1\rangle$ definovaná na σ-algebře $\mathcal{S}$.

2.2 Náhodná veličina

Definice 2.2 *Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Funkce X zobrazující množinu elementárních jevů Ω do množiny reálných čísel nazveme náhodnou veličinou, když pro každé reálné číslo x je množina elementárních jevů ω, pro které je $X(\omega) \leq x$ náhodným jevem, tj. když*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{S}$$

.

Poznámka 2.2 Na systému $\mathcal{B}_1$, všech borelovských funkcí množiny v $\mathbb{R}^\star$ (viz B.15) lze zavést funkci $P_X = \mathcal{B}_1 \to \mathbb{R}$, která množině $E \in \mathcal{B}_1$ přiřadí číslo

$$P_X(E) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\}).$$

Funkci P_X se říká rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X. Lze dokázat, že trojice $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, P_X)$ tvoří pravděpodobnostní prostor. Studium různých vlastností ve speciálním prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, P_X)$ je jistě snažší, než zkoumání obecného pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. To je také hlavní důvod pro zavedení pojmu náhodná veličina. Většina zajímavých informací o pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ může být získána správnou volbou náhodné veličiny X a následnou analýzou v $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, P_X)$. Ukazuje se, že k zadání pravděpodobnostní funkce P_X stačí zadat její hodnoty na intervalech typu $(-\infty, x)$, kde $x \in \mathbb{R}$. To nás přirozeně vede k zavedení pojmu distribuční funkce.

Definice 2.3 *Nechť X je náhodná veličina na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Potom funkci $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou na $\mathbb{R}$ předpisem*

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\})$$

nazveme distribuční funkcí náhodné veličiny X.

Poznámka 2.3 Místo zápisu $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\})$ budeme psát stručněji jen $P(X < x)$.

Věta 2.1 *Nechť F_X je distribuční funkce náhodné veličiny X. Pak F_X má následující vlastnosti:*

1. *F_X je neklesající funkce.*
2. *F_X má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti 1. druhu.*
3. *F_X je zleva spojitá v každém bodě $X \in \mathbb{R}$.*

Obráceně, nechť $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce, která je zleva spojitá na $\mathbb{R}$, přičemž $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$. Pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a náhodná veličina Y na $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ taková, že G je distribuční funkcí Y.

Poznámka 2.4 Lze dokázat, že pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbb{R}$ platí

$$P_X(E) = \int_E \mathrm{d}Fx,$$

kde integrál na pravé straně uvedeného vztahu chápeme jako Lebesgueův - Stieltjesův integrál (viz. B.21).

Definice 2.4 *Distribuční funkce F_X náhodné veličiny X se nazývá absolutně spojitá, existuje-li nezáporná borelovsky měřitelná funkce $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $X \in \mathbb{R}$ platí:*

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde uvedený integrál chápeme v Lebesgueově smyslu. Funkci f_X říkáme hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

Má-li X absolutně spojitou distribuční funkci, budeme stručně říkat, že X je spojitá náhodná veličina.

Poznámka 2.5 Nechť X je spojitá náhodná veličina. Pak

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$P_X((-\infty, x)) = \int_{(-\infty,x)} dFx = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

2. Hustota f_X je určena jednoznačně až na množinu Lebesgueovy míry nula vztahem

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

   v bodech x ve kterých existuje $F'_X(x)$.

Definice 2.5 *Nechť je dáno n náhodných veličin $X_1, ..., X_n$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Pak n-tici $(X_1, ..., X_n)$ nazveme náhodným vektorem na $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.*

Poznámka 2.6 Z náhodných veličin můžeme pomocí „běžných“ operací matematické analýzy vytvářet nové náhodné veličiny. To umožňuje následující tvrzení (viz. B.11).

Věta 2.2 *Nechť $(X_1, ..., X_n)$ je náhodný vektor v $\mathbb{R}^n$ a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je borelovsky měřitelné zobrazení. Potom $\varphi(X_1, ..., X_n)$ je náhodný vektor.*

Definice 2.6 *Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Uvažujme náhodné jevy $A_1 \in \mathcal{S}, A_2 \in \mathcal{S}, ..., A_n \in \mathcal{S}$. Pak řekneme, že systém těchto jevů je nezávislý, jelikož pro každé $k \in \{1, 2, ..., n\}$ a každou množinu $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset \{1, 2, ..., n\}$ platí:*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot ... \cdot P(A_{i_k}). \tag{1}$$

Platí-li vztah (1) pouze pro $k = 2$, mluvíme pouze o systému po dvou nezávislých jevů.

Poznámka 2.7 Smysl výše uvedené definice je zřejmý, potřebujeme však ještě pojem nezávislosti přirozeně přeformulovat pro práci s náhodnými veličinami.

Definice 2.7 *Řekneme, že náhodné veličiny $X_1, X_2, ..., X_n$ na $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ jsou nezávislé, jestliže pro každou borelovskou množinu $E \in \mathbb{R}$ tvoří náhodné jevy $\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \in E\}, \{\omega \in \Omega : X_2(\omega) \in E\}, ..., \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \in E\}$ nezávislý systém.*

3 Charakteristiky náhodných veličin

Definice 3.1 *Jednou z číselných charakteristik náhodné veličiny X je její střední hodnota $E(X)$, definovaná jako Lebesgueův-Stieltjesův integrál*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}F_X(x).$$

Poznámka 3.1 Pro spojitou náhodnou veličinu X s hustotou $f_X(x)$ dostáváme vztah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x,$$

kde výraz v pravo reprezentuje Lebesgueův integrál.

Pro střední hodnotu náhodné veličiny platí:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \tag{2}$$

což platí pro každé $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ a každé dvě náhodné veličiny X, Y na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, za předpokladu, že $E(X) \in \mathbb{R}$, $E(Y) \in \mathbb{R}$.

Vzorec (2) lze samozřejmě zobecnit pro případ konečně mnoha náhodných veličin.

Poznámka 3.2 Jestliže g je borelovsky měřitelná funkce reálné proměnné, tak $g(X)$ je náhodná veličina a existuje-li její střední hodnota, dá se vypočítat jako

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dF_X(x).$$

Definice 3.2 *Střední hodnota náhodné veličiny*

$$g(X) = (X - E[X])^2,$$

se nazývá rozptylem náhodné veličiny X. Tedy

$$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Věta 3.1 *Pro rozptyl náhodné veličiny platí:*

$$D(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2,$$

$$D(aX + b) = a^2 D(X),$$

za předpokladu, že $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $D(X) \in \mathbb{R}$.

Věta 3.2 *Nechť $X_1, X_2, ..., X_n$ tvoří nezávislý systém náhodných veličin. Potom $D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$.*

Poznámka 3.3 Potřebujeme ještě charakteristiku poskytující informaci o závislosti mezi dvěma náhodnými veličinami. Je určena střední hodnotou součinu odchylek obou náhodných veličin X, Y od jejich středních hodnot.

Definice 3.3 *Nechť je dán dvourozměrný náhodný vektor na* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$*, jehož složkami jsou náhodné veličiny* X, Y*. Pokud existuje číslo*

$$C(X,Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\},$$

pak jej nazýváme kovariancí náhodných veličin X, Y*.*

Poznámka 3.4 Pokud $C(X,Y) \in \mathbb{R}$, platí

$$C(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y).$$

Věta 3.3 *Nechť* X, Y *jsou nezávislé náhodné veličiny s konečnými rozptyly. Pak*

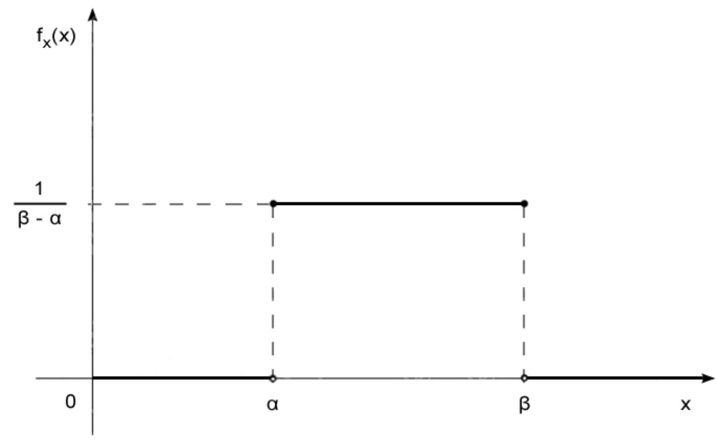
$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

3.1 Rovnoměrné a Gaussovo rozdělení náhodné veličiny

Dále budeme používat náhodné veličiny, které mají rovnoměrné nebo normální rozdělení pravděpodobnosti. Připomeňme si tedy základní vlastnosti těchto rozdělení.

3.1.1 Rovnoměrné rozdělění

Náhodná veličina X řídící se zákonem rovnoměrného rozložení na intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ (viz obrázek 1),

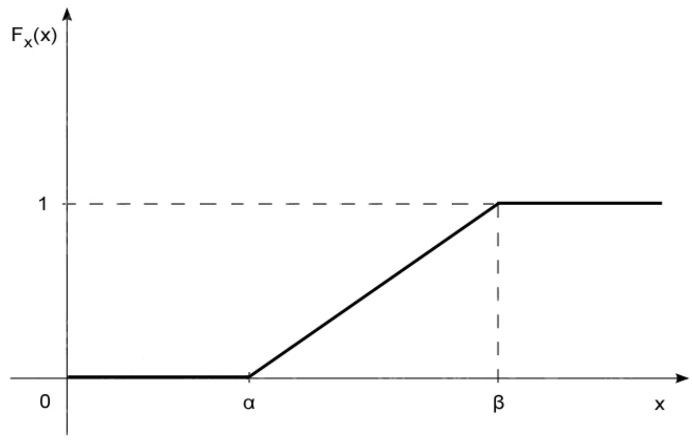


Obrázek 1: Rovnoměrné rozložení náhodné veličiny na intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$

má hustotu rozdělení pravděpodobnosti $f_X(x)$ dánu vzorcem

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha < x < \beta, \\ 0, & x < \alpha \text{ nebo } x > \beta. \end{cases}$$

Graf příslušné distribuční funkce $F_X(x)$ je znázorněn na obrázku (2)



Obrázek 2: Graf distribuční funkce náhodné veličiny

a její vyjádření vypadá následnovně:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1, & x > \beta \end{cases}$$

Střední hodnota náhodné veličiny X podléhající zákonu rovnoměrného rozdělení, je zřejmě:

$$E(X) = \int_\alpha^\beta \frac{x}{\beta-\alpha} \mathrm{d}x = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Rozptyl náhodné veličiny X je pak dán vztahem:

$$D(X) = \frac{1}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

3.1.2 Normální (Gaussovo) rozdělení

Je-li pro $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, \infty)$ zákon rozdělení náhodné veličiny X charakterizován hustotou pravděpodobnosti ve tvaru

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3}$$

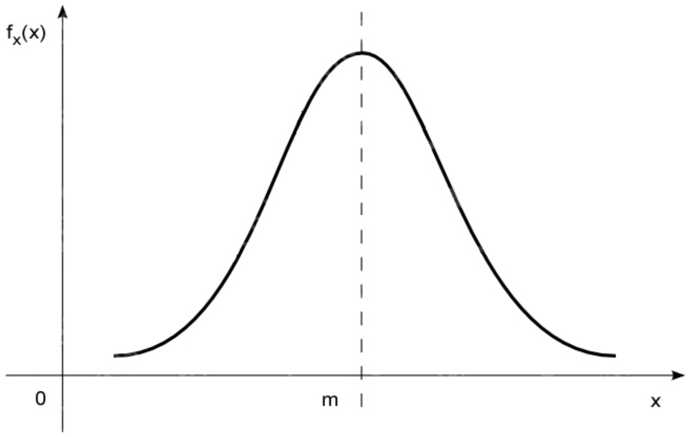
hovoříme o náhodné veličině s normálním rozdělením pravděpodobnosti.

Lze dokázat, že potom platí:

$$E(X) = m,$$

$$D(X) = \sigma^2.$$

Křivka rozdělení normálního zákona má symetrický zvonovitý tvar (viz obrázek 3), kterému říkáme Gaussova křivka.

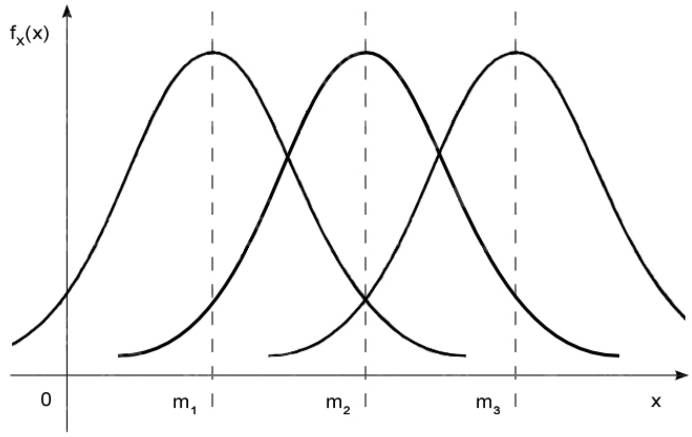


Obrázek 3: Křivka normálního rozložení

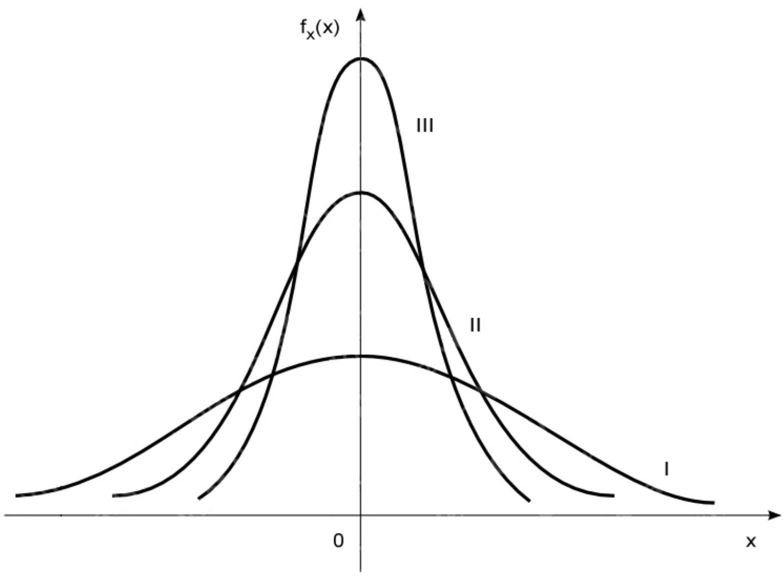
Je zřejmé, že maximální hodnota hustoty f_X se rovná $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ a odpovídá bodu $x = m$. Při vzdalování se od tohoto bodu hustota f_X klesá, f_X má nulovou asymptotu v $\pm\infty$.

Ze vztahu (3) bezprostředně vyplývá, že centrem symetrie normálního rozdělení je hodnota m. Při změně znaménka rozdílu $(x - m)$ na opačné se totiž díky kvadrátu nic nemění. Změníme-li hodnotu m, Gaussova křivka rozdělení se pouze posune ve směru osy x, a její tvar zůstane nezměněn (viz. obrázek 4). Rozměr parametru m je přirozeně totožný s rozměrem náhodné veličiny X.

Narozdíl od parametru m, jenž charakterizuje umístění křivky rozdělení, číslo σ (směrodatná odchylka) určuje samotný tvar této křivky. Na obrázku (5) jsou znázorněny tři Gaussovy křivky (I, II, III) , kde u všech tří je hodnota parametru m rovna nule. Křivka I. odpovídá největší a křivka III. nejmenší hodnotě σ. Rozměr parametru σ je také samozřejmě totožný s rozměrem náhodné veličiny X.



Obrázek 4: Gaussovy křivky I.



Obrázek 5: Gaussovy křivky II.

4 Náhodné procesy

4.1 Náhodný proces

Definice 4.1 *Nechť je dán pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$*. Budiž dána množina* $T \subset \mathbb{R}$*. Nechť zobrazení* $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *je definováno na* $\Omega \times T$*, přičemž pro každé pevně zvolené* $t \in T$ *je zobrazení* $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$*,* $X_t(\omega) = X(\omega, t)$ *náhodnou veličinou na* Ω *vzhledem k* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$*. Pak zobrazení* X *nazveme náhodným procesem.*

Příklad 4.1
Uvažujme dva nezávislé náhodné pokusy prováděné v časech $t_1 = 3, t_2 = 4$. V každém z pokusů nastane stav S (úspěch) s pravděpodobností $p = 0,2$ nebo stav F (neúspěch) s pravděpodobností $1 - p = 0,8$. Ukažme si, jak lze zkonstruovat stochastický proces X, který odpovídá popsané situaci. Zvolme:

$$T = \{3, 4\}$$

$$\Omega = \{(F, F), (F, S), (S, F), (S, S)\}$$

Označme symbolem $\mathcal{S}$ systém všech podmnožin množiny Ω. Na $\mathcal{S}$ lze definovat pravděpodobnostní funkci P. Tato funkce je jednoznačně zadána například následujícími podmínkami.

$$P(\{(F, F)\}) = (1 - p)^2 = 0,64$$
$$P(\{(F, S)\}) = p \cdot (1 - p)^2 = 0,16$$
$$P(\{(S, F)\}) = p \cdot (1 - p)^2 = 0,16$$
$$P(\{(S, S)\}) = p^2 = 0,04$$

Tímto máme definován pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a množinu $T \subset \mathbb{R}$. Nyní můžeme na $\Omega \times T$ definovat zobrazení X takto:

$$X((F, F), 3) = 0,\ X((F, S), 3) = 0$$

$$X((S, F), 3) = 1,\ X((S, S), 3) = 1$$

$$X((S, F), 4) = 0,\ X((S, S), 4) = 1$$

Zobrazení X tedy přiřadí elementárnímu jevu $\omega \in \Omega$ v čase $t \in T$ hodnotu 0, pokud odpovídají pokus v čase t nebyl úspěšný a hodnotu 1 v případě úspěchu.

Pro t = 3 získáváme funkci $X_3 : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$X((F, F), 3) = 0,\ X((F, S), 3) = 0,$$

$$X((S, F), 3) = 1,\ X((S, S), 3) = 1,$$

přičemž X_3 je zřejmě náhodnou veličinou na Ω vzhledem k $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.

Volbou t = 4 získáváme funkci $X_4 : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$X((F, F), 4) = 0,\ X((F, S), 4) = 1,$$

$$X\left(\left(S,F\right),4\right)=0,\ X\left(\left(S,S\right),4\right)=1,$$

která je také náhodnou veličinou na Ω vzhledem k $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Zobrazení X je tedy náhodným procesem.

V uvedeném případě se množina $T = \{3,4\}$ skládá ze dvou časových okamžiků a uvažovanému náhodnému procesu X jsme tak mohli jednoznačně přiřadit náhodný vektor (X_3, X_4). ■

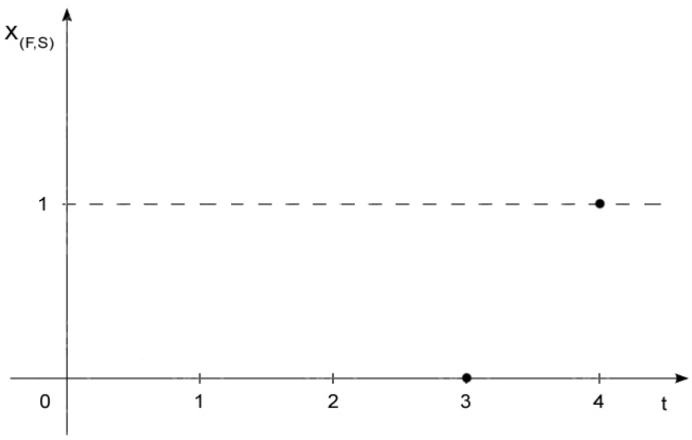
Poznámka 4.1 Pokud T obsahuje nejvýše spočetně mnoho hodnot, mluvíme o náhodných procesech s diskrétním časem.

Poznámka 4.2 Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, množina $T \subset \mathbb{R}$ a náhodný proces $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$. Zvolme pevně $\omega \in \Omega$ a uvažujme funkci $X_\omega : T \to \mathbb{R}$, $X_\omega\left(\omega, t\right) = X\left(\omega, t\right)$. Pak funkci X_ω nazýváme realizací náhodného procesu.

Příklady realizací náhodneho procesu z předchozího příkladu:

$$X_{(F,S)} : T \to \mathbb{R},\ X_{(F,F)}\left(3\right) = 0,\ X_{(F,F)}\left(4\right) = 1$$

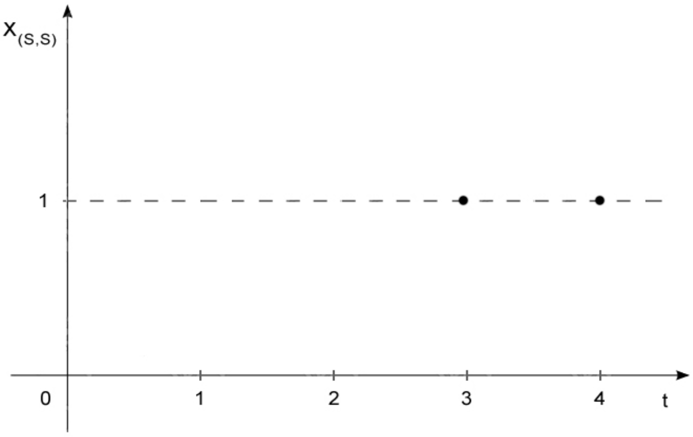
$$X_{(S,S)} : T \to \mathbb{R},\ X_{(F,S)}\left(3\right) = 1,\ X_{(F,S)}\left(4\right) = 1$$



Obrázek 6: Funkce $X_{(F,S)}$

Příklad 4.2

Uvažujme jednoduchý elektrický obvod obsahující pouze napěťový zdroj a rezistor. V obvodu je proud I svázán s napětím Ohmovým zákonem $I = G \cdot U$, kde vodivost G je převrácenou hodnotou ohmického odporu rezistoru. Zkoumejme možné průběhy proudu v obvodu v časovém rozmezí $T = \langle 0, 2\pi \rangle$ za podmínky $U\left(t\right) = \sin(t)$. Předpokládejme přitom, že v čase 0 došlo k náhodnému stanovení vodivosti G rezistoru a poté se hodnota G nemění. G tedy představuje náhodnou veličinu na pravděpodobnostním prostoru $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{P}\right)$, kde $\tilde{\Omega}$ je množina všech možných stavů rezistoru v čase a $\tilde{P}$ je nějaká



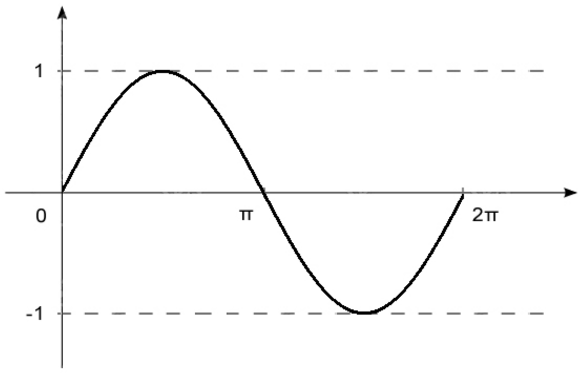
Obrázek 7: Funkce $X_{(S,S)}$

pravděpodobnostní funkce definovaná na systému náhodných jevů $\tilde{\mathcal{S}}$. Ke každému stavu $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ zřejmě přísluší právě jeden průběh $\omega = \phi(\omega)$ proudu v obvodu. Označme symbolem Ω množinu všech průběhů proudu v obvodu, které přísluší všem stavům množiny $\tilde{\Omega}$, tj. obor hodnot vzájemně jednoznačného zobrazení ϕ. Nyní přiřaďme každé množině $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{S}}$ množinu $A \subset \Omega : A = \phi\left(\tilde{A}\right) = \left\{\phi(\tilde{\omega}) : \tilde{\omega} \in \tilde{A}\right\}$. Označme $\mathcal{S} = \bigcup_{\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{S}}} \left\{\phi\left(\tilde{A}\right)\right\}$ a na $\mathcal{S}$ definujme funkci $P : \mathcal{S} \to \langle 0, 1\rangle$ předpisem $P\left(\phi\left(\tilde{A}\right)\right) = \tilde{P}\left(\tilde{A}\right)$. Získali jsme tak trojici $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, která je zřejmě pravděpodobnostním prostorem. Nyní lze na $\Omega \times \langle 0, 2\pi\rangle$ definovat zobrazení X předpisem $X(\omega, t) = G\left(\phi^{-1}(\omega)\right) \cdot \sin(t), t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Pro každé pevné $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je funkce $X_t : \Omega \to \mathbb{R}, X_t(\omega) = G\left(\phi^{-1}(\omega)\right) \cdot \sin(t)$ náhodnou veličinou na Ω. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ totiž platí: $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) < \alpha\} = \left\{\omega \in \Omega : G\left(\phi^{-1}(\omega)\right) \cdot \sin(t) < \alpha\right\} = \{\phi(\tilde{\omega}) \in \Omega : G(\tilde{\omega}) \cdot \sin(t) < \alpha\} = \phi\Big(\Big\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : G(\tilde{\omega}) \cdot \sin(t) < \alpha\Big\}\Big) \in \mathcal{S}$. Zobrazení X je tedy náhodným procesem, jednotlivé realizace X_ω si můžeme představit jako grafy funkcí $G\left(\phi^{-1}(\omega)\right) \cdot \sin(t)$, které zobrazují závislosti průběhu proudu na čase t (viz obrázky 8 a 9). ■

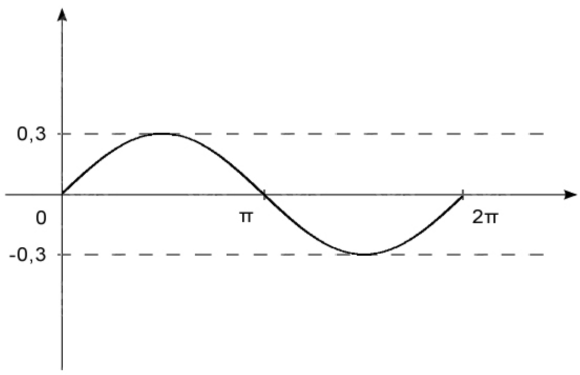
4.2 Rozklad náhodného procesu

Příklad 4.3

Uvažujme obvod se dvěma rezistory (viz. obrázek 10) a dvěma zdroji napětí. Předpokládejme, že $U_1(t) = \sin(t)$, $U_2(t) = \sin(2t)$. Zkoumejme stav obvodu v časovém rozmezí $T = \langle 0, 2\pi\rangle$ za předpokladu, že v čase 0 je náhodně stanoven vektor (G_1, G_2) vodivostí rezistorů R_1, R_2 a poté se již hodnoty vodivostí obou rezistorů nemění. (G_1, G_2) je tedy náhodným vektorem na jistém pravděpodobnostním prostoru $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{P}\right)$. Označme Ω systém všech možných průběhů dvojice proudů v obvodu v intervalu $T = \langle 0, 2\pi\rangle$.



Obrázek 8: $G(\omega) = 1,\ X_\omega(t) = \sin t$



Obrázek 9: $G(\omega) = 1,\ X_\omega(t) = 0.3 \sin t$

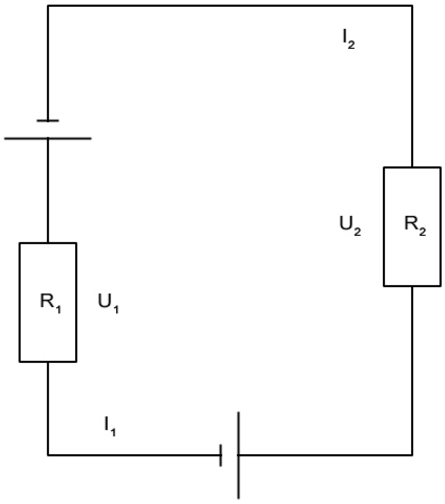
Ke každému $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ zřejmě přísluší právě jeden průběh dvojice proudů v obvodu. Lze tedy definovat zobrazení $\phi : \tilde{\Omega} \to \Omega$, které každému stavu $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ dvojice rezistorů přiřadí příslušný průběh $\omega \in \Omega$ dvojice proudů v obvodu v intervalu T. Zobrazení ϕ je zřejmě vzájemně jednoznačné.

Označme

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{S}}} \left\{ \phi\left(\tilde{A}\right) \right\}$$

a na $\mathcal{S}$ definujme funkci $P : \mathcal{S} \to \langle 0, 1 \rangle$ přepisem $P\left(\phi\left(\tilde{A}\right)\right) = \tilde{P}\left(\tilde{A}\right)$. Trojice $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravděpodobnostním prostorem.

Použijeme-li k analýze zadaného obvodu nejprve Kirchhoffovy zákony a pak Ohmův zákon, získáme vztah $I_1(t) + I_2(t) = G_1 U_1(t) + G_2 U_2(t),\ t \in T$. Nyní můžeme věnovat pozornost sestavenému stochastickému procesu, který bude popisovat součet proudů v uvedené rovnosti. Na Ω zřejmě můžeme definovat funkci $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$,



Obrázek 10: Obvod se dvěma rezistory a dvěma zdroji napětí

$X(\omega, t) = G_1\left(\phi^{-1}(\omega)\right) \cdot \sin(t) + G_2\left(\phi^{-1}(\omega)\right) \cdot \sin(2t)$. Pro pevně zvolené $t \in T$ je zobrazení $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ $X_t(\omega) = X(\omega, t)$ lineární kombinací náhodných veličin $G_1 \circ \phi^{-1}$, $G_2 \circ \phi^{-1}$. X_t je tedy pro každé $t \in T$ náhodným jevem, což podle definice znamená, že X je náhodný proces. Zvolme nyní pevně $\omega \in \Omega$ a uvažujme zobrazení $X_\omega : T \to \mathbb{R}$, $X_\omega(t) = X(\omega, t)$. Pak si funkci X_ω můžeme představit jako graf průběhu součtů proudů $I_1 + I_2$ v intervalu T, tedy jako konkrétní popis jedné realizace procesu X. ■

Poznámka 4.3 V předchozích příkladech jsme uvažovali dosti speciální případ - brali jsme v úvahu jen takové průběhy, v nichž se vodivosti rezistorů již dále neměnily. Studium takovýchto procesů je z matematického hlediska relativně snadné a umožní nám tak první nahlédnutí do obecné teorie stochastických procesů.

Definice 4.2 *Budiž dán pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, *náhodná veličina* $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *na tomto prostoru a interval* $T \subset \mathbb{R}$. *Nechť na* T *je definována deterministická funkce* $\varphi : T \to \mathbb{R}$. *Pak stochastický proces* $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *definovaný předpisem* $X(\omega, t) = V(\omega) \cdot \varphi(t)$ *nazveme elementárním náhodným procesem.*

Definice 4.3 *Nechť je dán m-rozměrný náhodný vektor* $(V_1, V_2, ..., V_m)$ *na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. *Nechť na intervalu* $T \subset \mathbb{R}$ *je zadána m-tice reálných funkcí* $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$. *Lze-li náhodný proces* $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *napsat ve tvaru*

$$X(\omega, t) = \sum_{i=1}^{m} V_i(\omega)\, \varphi_i(t), \quad \omega \in \Omega,\ t \in T \tag{4}$$

pak řekneme, že X *je rozložitelný náhodný proces. Součet na pravé straně rovnosti v (4) pak nazveme rozkladem náhodného procesu* X.

Poznámka 4.4 Zdůrazněme, že:

1. Ne každý náhodný proces je rozložitelný.

2. Rozklad náhodného procesu zřejmě není dán jednoznačně, můžeme například psát

$$X(\omega,t)=\sum_{i=1}^{m}V_i(\omega)\varphi_i(t)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2}V_i(\omega)\right)\cdot(2\varphi_i(t))=\sum_{i=1}^{m}V_i(\omega)\cdot\bar{\varphi}_i(t),$$

pokud klademe pro $i=1,.....,m$:

$$\bar{V}_i=\frac{1}{2}V_i,\ \bar{\varphi}_i=2\varphi_i.$$

4.3 Charakteristiky náhodného procesu

4.3.1 Střední hodnota náhodného procesu

Definice 4.4 *Nechť je dán náhodný proces $X_t:\Omega\times T\to\mathbb{R}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\mathcal{S},P)$ a intervalu $T\subset\mathbb{R}$. Pak funkci $E_X:T\to\mathbb{R}$, $E(t)=E(X_t)$ nazveme střední hodnotou procesu X_t.*

Věta 4.1 *Nechť $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$ a náhodné procesy X,Y mají pro každé $t\in T$ konečné střední hodnoty. Pak platí:*

$$E_{aX+bY}=aE_X+bE_Y$$

Poznámka 4.5 Předchozí vzorec ukazuje, že střední hodnota náhodného procesu je lineární operátor. Tato práce se zabývá speciálními případy stochastických procesů. Ukážeme si tedy, v jaké vztahy přechází základní vztah pro střední hodnotu náhodného procesu, aplikujeme-li ho na dříve definovaný elementární náhodný proces a rozklad náhodného procesu.

Střední hodnota elementárního náhodného procesu X.

Uvažujeme-li elementární náhodný proces $X(\omega,t)=V(\omega)\varphi(t)$, pak jeho střední hodnota $E(X)$ je dána vztahem ve tvaru:

$$E_X(t)=E(V\varphi(t)),\ t\in T.$$

Jelikož pro pevně zvolené $t\in T$ je $\varphi(t)\in\mathbb{R}$, lze konstantu $\varphi(t)$ vytknout a tedy

$$E_X(t)=\varphi(t)E(V).$$

Střední hodnota rozkladu náhodného procesu.

Mějme dán náhodný proces ve tvaru rozkladu

$$X(\omega,t)=\sum_{i=1}^{m}V_i(\omega)\varphi_i(t).$$

Jeho hodnota E_X je pak dána vztahem ve tvaru:

$$E_X(t) = E\left(\sum_{i=1}^{m} V_i \varphi_i(t)\right), \ t \in T,$$

jenž můžeme díky konkrétním hodnotám deterministické funkce $\varphi(t)$ v pevně zvoleném t upravit na následující tvar:

$$E_X(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) \cdot E(V_i), \ t \in T.$$

4.3.2 Rozptyl náhodného procesu

Definice 4.5 *Nechť je dán náhodný proces $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a intervalu $T \subset \mathbb{R}$. Pak funkci $D_X : T \to \mathbb{R}$, $D_X(t) = D(X_t)$, $t \in T$, nazveme rozptylem procesu X.*

Poznámka 4.6 Platí tedy:

$$\forall t \in T: \ D_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X_t))^2 \, \mathrm{d}F_t,$$

kde F_t je distribuční funkce náhodné veličiny X_t.

Věta 4.2 *Nechť $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, X je náhodný proces na prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, a intervalu $T \subset \mathbb{R}$, $(X_1, ..., Xm)$ je m-tice náhodných procesů na prostoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a intervalu $T \subset \mathbb{R}$.*

Nechť pro každé $t \in T$ je systém náhodných veličin $X_{1_t}, X_{2_t}, ..., X_{m_t}$ nezávislý. Nechť existují rozptyly všech zavedených náhodných procesů. Pak platí

1. $D_{aX+b} = a^2 D_X$,
2. $D \sum\limits_{i=1}^{m} X_i = \sum\limits_{i=1}^{m} D_{X_i}$.

Rozptyl elementárního náhodného procesu X.

Mějme elementární náhodný proces $X(\omega, t) = V(\omega) \cdot \varphi(t)$. Pak jeho rozptyl D_X je dán vztahem ve tvaru:

$$D_X(t) = D(V \cdot \varphi(t)), \ t \in T.$$

Jelikož je v pevně zvoleném t $\varphi(t) \in \mathbb{R}$, můžeme dále tento vztah upravit do následující podoby:

$$D_X(t) = (\varphi(t))^2 D(V).$$

Rozptyl rozkladu náhodného procesu.

Mějme náhodný proces daný součtem dílčích elementarních náhodných procesů v tomto tvaru: $X(\omega, t) = \sum_{i=1}^{m} V_i(\omega) \varphi_i(t)$. Nechť $V_1, ..., V_m$ tvoří systém nezávislých náhodných veličin. Pak rozptyl D_X je dán vztahem:

$$D_X(t) = D\left(\sum_{i=1}^{m} V_i \varphi_i(t)\right),\ t \in T,$$

který můžeme, podle výše uvedených vlastností rozptylu ještě upravit do následujícího tvaru:

$$D_X(t) = \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(t))^2 D(V_i). \tag{5}$$

4.3.3 Autokorelační funkce náhodného procesu

Definice 4.6 *Jestliže pro všechna $t, t' \in T$ existuje hodnota*

$$C_X(t, t') = E((X_t - E(X_t)) \cdot (X_{t'} - E(X_{t'}))),$$

pak funkci C_X, definovanou výše uvedeným předpisem, nazveme autokorelační funkcí náhodného procesu X.

Autokorelační funkce elementárního náhodného procesu X

Mějme dán elementární náhodný proces $X(\omega, t) = V(\omega) \varphi(t)$. Nechť $E(V) = 0$. Pak jeho autokorelační funkce C_X je dána vztahem:

$$C_X(t, t') = E\left(V\varphi(t) \cdot V\varphi(t')\right),\ t \in T, t' \in T,$$

který můžeme na základě výše uvedených vlastností číselných charakteristik náhodného procesu převést na tvar

$$C_X(t, t') = \varphi(t)\varphi(t') E\left(V^2\right),\ t \in T, t' \in T$$

tedy

$$C_X(t, t') = \varphi(t)\varphi(t') D(V),\ t \in T, t' \in T.$$

Autokorelační funkce rozkladu náhodného procesu X

Mějme náhodný proces daný součtem dílčích elementárních náhodných procesů v tomto tvaru:

$$X(\omega, t) = \sum_{i=1}^{m} V_i(\omega) \varphi_i(t),$$

přičemž předpokládejme, že náhodné veličiny $V_1, V_2, ..., V_m$ tvoří nezávislý systém. Autokorelační funkce C_X procesu X je pak dána vztahem ve tvaru:

$$C_X(t, t') = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) \varphi_i(t') D_i(V_i),\ t \in T, t' \in T. \tag{6}$$

Poznámka 4.7

- Má-li stochastický proces X rozptyl, pak zřejmě platí $D_X(t) = C_X(t, t')$, $t \in T$.
- Vztahy pro rozptyl a autokorelační funkci náhodného procesu lze v případě rozložitelných procesů zapsat velmi jednoduše (viz 5, 6) v případě nezávislosti systému $V_1, V_2, ..., V_m$.

Definice 4.7 *Nechť stochastický proces X lze rozložit do tvaru*

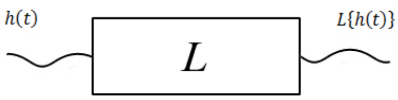
$$X(\omega, t) = \sum_{i=1}^{m} V_i(\omega) \cdot \varphi_i(t), \; t \in T,$$

kde $V_1, V_2, ..., V_m$ tvoří nezávislý systém náhodných veličin. Pak pravou stranu tohoto rozkladu nazveme kanonickým rozkladem procesu X.

5 Lineární transformace

5.1 Deterministický model

Nechť je na vstupu nějakého zařízení deterministická funkce h (viz. obrázek 11). Systém tuto funkci transformuje prostřednictvím lineárního operáloru L na výstup ve tvaru $L\{h\}$. Vztáhnuto na konkrétní problematiku této práce, bude systém popsán lineární diferenciální rovnicí a lineární operátor L bude odpovídat řešiči této rovnice.



Obrázek 11: Transformace - deterministický model

5.2 Stochastický model

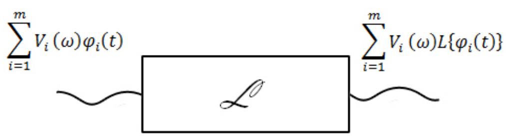
V předchozím modelu jsme počítali s tím, že vstupem do systému je deterministická funkce. V této části, situaci zobecníme na náhodný vstup, který bude mít tvar kanonického rozkladu:

$$X(\omega, t) = \sum_{i=1}^{m} V_i(\omega)\, \varphi_i(t)\,.$$

Uvažujeme-li stejné zařízení, bude popis odezvy systému na náhodný vstup zřejmě dán opertorem $\mathcal{L}$ (viz. obrázek 12), který má tu vlastnost, že vstupní náhodný proces ve tvaru kanonického rozkladu transformuje na výstup takto:

$$\mathcal{L}\{X\}(\omega, t) = \mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^{m} V_i(\omega)\, \varphi_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{m} V_i(\omega)\, L\{\varphi_i\}(t)\,,$$

(L je lineární operátor odpovídajícího deterministického modelu).



Obrázek 12: Transformace - stochastický model

Střední hodnota rozkladu náhodného vstupu:

$$E_X(t) = E\left(\sum_{i=1}^{m} V_i \varphi_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)\, E(V_i)\,,\ t \in T.$$

Odtud, díky linearitě L:

$$E_{\mathcal{L}\{X\}}(t) = E\left(\sum_{i=1}^{m} V_i \cdot L\{\varphi_i\}(t)\right) = \sum_{i=1}^{m} L\{\varphi_i\}(t) \cdot E(V_i).$$

Rozptyl kanonického rozkladu náhodného vstupu:

$$D_X(t) = D\left(\sum_{i=1}^{m} V_i \varphi_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(t))^2 D(V_i).$$

Jeho transformace tedy vypadá takto

$$D_{\mathcal{L}\{X\}}(t) = \sum_{i=1}^{m} L\left\{(\varphi(t))^2\right\} \cdot D(V_i).$$

Protože autokorelační funkce rozkladu náhodného procesu X je dána vztahem

$$C_X(t, t') = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) \varphi_i(t') D(V_i),$$

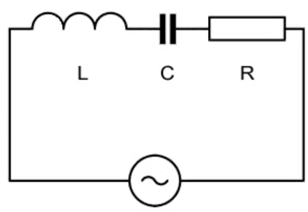
po transformaci získáváme:

$$C_{\mathcal{L}\{X\}}(t) = \sum_{i=1}^{m} D(V_i) L\{\varphi_i\}(t) \cdot L\{\varphi_i\}(t').$$

6 Aplikace

6.1 RLC obvod

RLC je označení pro obvody, které jsou připojeny ke zdroji střídavého napětí a které jsou obecně tvořeny rezistorem o odporu R, ideální cívkou s indukčností L a ideálním kondenzátorem s kapacitou C. Tyto prvky lze do obvodu umístit různými způsoby s výsledkem sériového, nebo paralelního zapojení RLC obvodu. V této práci se budeme dále zabývat jen sériovým RLC obvodem (viz. obrázek 13), který simuluje programová aplikace.



Obrázek 13: Sériový RLC obvod

Prvky RLC obvodu zapojeného do série prochází stejný proud, ale napětí na jednotlivých prvcích se liší jak hodnotou tak i vzájemnou fází: napětí u_R na rezistoru má stejnou fázi jakou proud, napětí u_L na cívce předbíhá proud a napětí u_C na kondenzátoru se za proudem zpožuje.

6.2 Odvození diferenciální rovnice

Aplikace řeší lineární diferencialní rovnici druhého řádu, která vznikne matematickým popisem sériového RLC obvodu. Aby bylo možné tuto rovnici sestavit, je třeba uvést několik fyzikálních vztahů, charakterizujících děje, které v obvodu probíhají.

Obvod obsahuje zdroj střídavého napětí u a napětí na dílčích prvcích lze vyjádřit následujícím způsobem:

Napětí u_C na kondenzátoru, jemuž náleží kapacita C, což je vlastně schopnost kondenzátoru ukládat elektrický náboj Q, je vyjádřeno vztahem

$$u_C = \frac{Q}{C}.$$

Napětí u_L na cívce, které přísluší indukčnost L, je dáno vztahem

$$u_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

Celým okruhem protéká proud I daný vzorcem

$$I = \frac{u + u_C + u_L}{R}$$

Po dosazení vztahů pro napětí u_C a u_L získáme diferenciální rovnici, kterou proud I v obvodu splňuje ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ má význam derivace podle proměnné t)

$$IR = u + \frac{1}{C}Q - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

s využitím vztahu $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ a matematickými úpravami získáme:

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

6.3 Pravá strana rovnice

Pravá strana rovnice, která v okamžiku kdy jsme v předchozí kapitole dokončili odvození potřebné lineární diferenciální rovnice druhého řádu, obsahuje jen derivaci střídavého napětí u, jímž je obvod buzen. Tento tvar však není pro zde řešenou úlohu konečný. Protože chceme zkoumat vstup ovlivněný náhodným procesem, musí pravá strana obsáhnout i tyto náhodné vlivy.

Obecné vyjádření pravé strany odvozené diferenciální rovnice bude mít pro naši úlohu tvar derivace následujícího součtu, jenž vyjadřuje lineární kombinaci deterministických poruch se stochastickými koeficienty:

$$X(\omega, t) = u(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i(\omega)\, \varphi_i(t).$$

Dále budeme předpokládat, že $V_1, ..., V_m$ tvoří nezávislý systém náhodných veličin. Náhodná veličina V musí být centrovaná, provedeme tedy následující úpravu

$$X(\omega, t) = u(t) + \sum_{i=1}^{m} \left[V_i(\omega) - E(V_i) + E(V_i)\right] \varphi_i(t),$$

protože rozdíl $V_i(\omega) - E(V_i(\omega))$ je centrovanou náhodnou veličinou $\mathring{V}$ ($\mathring{V}$ má nulovou střední hodnotu) můžeme psát

$$X(\omega, t) = u(t) + \sum_{i=1}^{m} E(V_i \varphi_i(t)) + \sum_{i=1}^{m} \mathring{V}_i(\omega)\, \varphi(t),$$

kde

$$E_X(t) = u(t) + \sum_{i=1}^{m} E(V_i \varphi_i(t))$$

Abychom získali pravou stranu v diferenciální rovnici (7), musíme ještě derivovat:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(\omega, t) = \frac{\mathrm{d}E_X(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{m} E(V_i) \cdot \varphi_i'(t) + \sum_{i=1}^{m} \mathring{V}_i(\omega) \cdot \varphi_i'(t).$$

6.4 Počáteční podmínky

Chceme-li pomocí diferenciální rovnice formulovat úlohu, která má právě jedno řešení, je nutné předepsat tolik počátečních podmínek, jaký je řád rovnice. Jelikož odvozená lineární diferenciální rovnice je 2. řádu, je třeba předepsat dvě počáteční podmínky. V tomto konkrétním případě, kdy odvozená rovnice popisuje sériový RLC obvod (obrázek 13) budou mít počáteční podmínky následující tvar

$$i\left(t_0\right) = y_0,$$

$$i'\left(t_0\right) = y_0',$$

kde t_0 bude v obou případech rovno nule. Zde pro jednoduchost předpokládáme, že počáteční podmínky nemají náhodný charakter.

Hodnota první počáteční podmínky $i\left(0\right)$ vyplývá z Ohmova zákona, a je rovna podílu

$$i\left(0\right) = \frac{U_C\left(0\right)}{R},$$

kde U_C je napětí na kondenzátoru v nulovém čase a R odpor obvodu.

Hodnota druhé počáteční podmínky $i'\left(0\right)$ je dána podílem indukovaného napětí a indukčnosti cívky tj.

$$\frac{U_L\left(0\right)}{L} = \frac{\mathrm{d}I\left(0\right)}{\mathrm{d}t},$$

kde U_L je napětí na cívce v nulovém čase a L je indukčnost, jenž cívce náleží.

6.5 Vstupní charakteristiky

Aplikace je schopna vyhodnotit a zobrazit číselné charakteristiky a autokoraleční funkci vstupního náhodného procesu.

Graf střední hodnoty, jenž je aplikací vykreslen je

$$E\left(X\right) + \sum_{i=1}^{m} E\left(V_i\right)\varphi_i\left(t\right).$$

Graf rozptylu vznikne zobrazením funkce proměnné t ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\varphi_i\left(t\right)\right)^2 D\left(V_i\right).$$

Grafem autokorelační funkce je plocha zobrazující funkci dvou proměnných t a t' ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i\left(t\right)\varphi_i\left(t'\right) D_i\left(V_i\right).$$

6.6 Výstupní charakteristiky

Tak jako vstupní charakteristiky, zobrazuje aplikace i příslušné charakteristiky výstupního náhodného procesu.

Graf střední hodnoty, jenž je aplikací vykreslen je průběhem funkce proměnné t

$$L\left\{u\right\}(t) + \sum_{i=1}^{m} E\left(V_i\right) L\left\{\varphi_i\right\}(t).$$

Graf rozptylu vznikne zobrazením funkce proměnné t ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m} \left(L\left\{\varphi\right\}(t)\right)^2 D\left(V_i\right).$$

Grafem autokorelační funkce je plocha zobrazující funkci dvou proměnných t a t' ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m} L\left\{\varphi_i\right\}(t) L\left\{\varphi_i\right\}\left(t'\right) D\left(V_i\right).$$

6.7 Porovnání výsledků

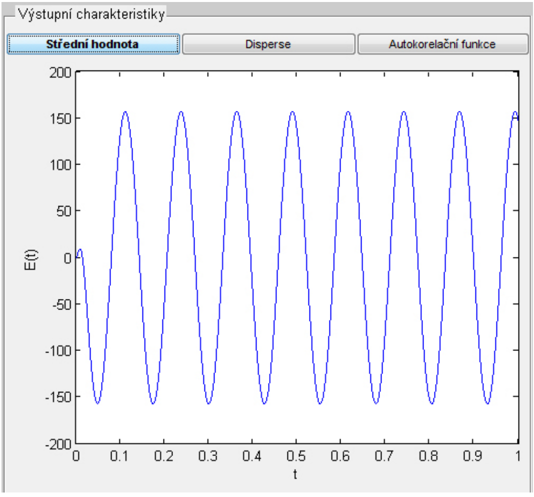
Předpokládejme následující vstupní hodnoty pro sériový RLC obvod:

- $R = 10\Omega$
- $L = 50mH$
- $C = 1000\mu F$
- $U(t) = \sin(50 * t)\, V$
- $f_1(t) = \cos(50 * t)\, V$
- Náhodná veličina V_1 s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 0, 6\rangle$
- $U_C(0) = 0$
- $U_L(0) = 0$

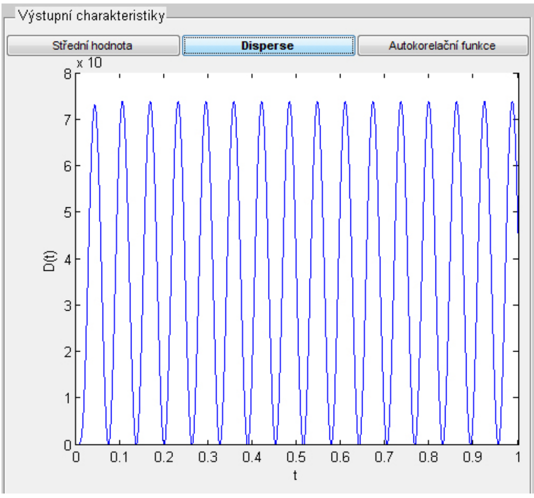
Poznamenejme, že přiložený softwarový nástroj při těchto vstupních parametrech zobrazí následující grafy (obrázky 14, 15, 16).

Abychom mohli provést porovnání výsledků, zobrazíme nezávisle na aplikaci grafy funkcí získaných pomocí vztahů pro jednotlivé charakteristiky uvedených v kapitole (6.6).

Ve vztazích pro všechny výstupní charakteristiky se objevuje transformace pomoci operátoru L, což jak již víme z kapitoly (5) znamená vyřešení patřičné ODR. Tyto rovnice budou řešeny metodou speciální pravé strany. Pro pohodlí čtenáře je potřebná teorie z oblasti obyčejných diferenciálních rovnic, včetně stručného popisu použité metody, vložena v příloze (C).



Obrázek 14: Střední hodnota výstup



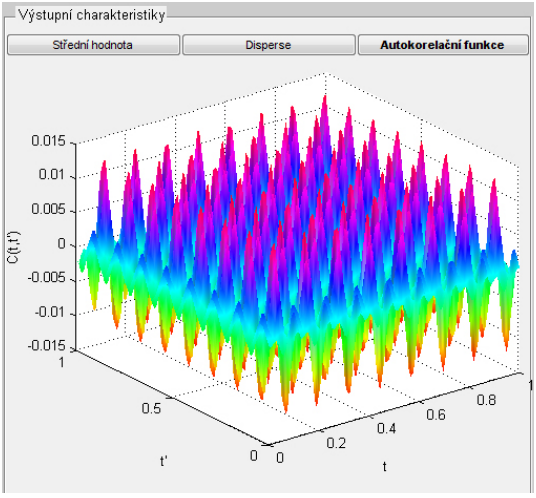
Obrázek 15: Rozptyl výstupu

První z Cauchyových úloh, kterou je třeba vyřešit, aby bylo možné zobrazit graf střední hodnoty výstupu se skládá z rovnice

$$0,05y'' + 10y' + 1000y = 50\cos(50t) - 150\sin(50t),$$

a počátečních podmínek ve tvaru

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$



Obrázek 16: Autokorelační funkce výstupu

Řešení:

Charakteristická rovnice náležící přidružené homogenní rovnici má tvar

$$0,05\lambda^2 + 10\lambda + 1000 = 0,$$

její kořeny jsou komplexně sdružená čísla

$$\lambda_{1,2} = -100 \pm 100i.$$

Odtud tedy dostáváme, že funkce

$$y_1(t) = e^{-100t} \cos(100t), \; y_2(x) = e^{-100t} \sin(100t)$$

jsou lineárně nezávislá řešení přidružené homogenní rovnice.

Tvar obecného řešení je pak následující

$$y(t) = C_1 e^{-100t} \cos(100t) + C_2 e^{-100t} \sin(100t), \; C_1, \; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravou stranu dané rovnice $q(t)$ můžeme psát ve tvaru:

$$q(t) = e^{0t} (50 \cos(50t) - 150 \sin(50t))$$

tedy platí, že $\alpha = 0$, $\beta = 50$, $P_1(x) = 50$, $P_2(x) = -150$ a $k = 0$ (číslo $50i$ není kořenem charakteristické rovnice).

Partikulární řešení zadané nehomogenní rovnice budeme proto hledat ve tvaru

$$\psi_p = x^0 e^{0t} [A \cos(50t) + B \sin(50t)] = A \cos(50t) + B \sin(50t),$$

kde A, B jsou zatím neznámé reálné konstanty.

Vypočteme-li nyní ψ_p' a ψ_p'' a dosadíme-li funkci ψ_p do rovnice v zadání, získáme po úpravě rovnost

$$(35A + 20B) \cos(50t) + (-20A + 35B) \sin(50t) = 2 \cos(50t) - 6 \sin(50t)$$

Porovnáním koeficientů u funkcí cos a sin získáme soustavu lineárních rovnic

$$35A + 20B = 2, \; -20A + 35B = -6,$$

která má právě jedno řešení

$$A = \frac{38}{325}, \; B = -\frac{34}{325}.$$

Získáme tedy partikulární řešení:

$$\psi_p(t) = \frac{38}{325} \cos(50t) - \frac{34}{325} B \sin(50t),$$

a obecné řešení zadané rovnice:

$$y(t) = \frac{38}{325} \cos(50t) - \frac{34}{325} \sin(50t) + C_1 e^{-100t} \cos(100t) + C_2 e^{-100t} \sin(100t), \; C_1, \; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané Cauchyovy úlohy musí vyhovovat zadaným počátečním podmínkám. To vede ksoustavě rovnic tvaru:

$$C_1 + \frac{38}{325} = 0,$$

$$-100C_1 + 100C_2 - \frac{1700}{325} = 0.$$

Řešením této soustavy je dvojice

$$C_1 = -\frac{38}{325}, \; C_2 = -\frac{-21}{325}.$$

Řešením zadané Cauchyový úlohy je tedy funkce daná předpisem

$$\frac{38}{325} \cos(50t) - \frac{34}{325} B \sin(50t) - \frac{38}{325} e^{-100t} \cos(100t) - \frac{21}{325} e^{-100t} \sin(100t).$$

Tento výsledkek vlastně představuje člen ve vzorci pro střední hodnotu výstupu

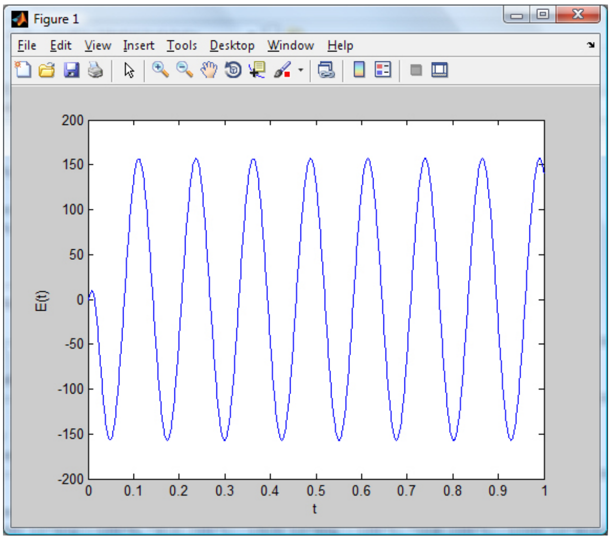
$$E_{\mathcal{L}\{U+V_1 f_1\}}(t).$$

Po dosazení dosazení a zobrazení vzniklé funkce v MATLABU získáme následující graf (obrázek 17).

Porovnáme-li graf (viz obrázek 17) s grafickým výsledkem (viz obrázek 14) zobrazeným aplikací, vidíme že jsou totožné.

V pořádí druhá diferenciální rovnice, jejíž řešení je potřebné k zobrazení rozptylu a autokorelační funkce výstupu má tvar

$$0,05y'' + 10y' + 1000y = -50 \sin(50t)$$



Obrázek 17: Střední hodnota zobrazená na základě předchozích výpočtů

s počátečními podminkami

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Charakteristická rovnice náležící přidružené homogenní rovnici má tvar

$$0,05\lambda^2 + 10\lambda + 1000 = 0,$$

její kořeny jsou stejně jako v předchozím příkladě komplexně sdružená čísla

$$\lambda_{1,2} = -100 \pm 100i.$$

Odtud tedy dostáváme, že funkce

$$y_1(t) = e^{-100t}\cos(100t),\ y_2(t) = e^{-100t}\sin(100t)$$

jsou lineárně nezávislá řešení dané rovnice.

Tvar obecného řešení je pak následující

$$y(t) = C_1e^{-100t}\cos(100t) + C_2e^{-100t}\sin(100t),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravou stranu dané rovnice $q(t)$ můžeme psát ve tvaru:

$$q(t) = e^{0t}(0\cos(50t) - 50\sin(50t))$$

tedy platí, že $\alpha = 0$, $\beta = 50$, $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = -50$ a $k = 0$ (číslo $50i$ není kořenem charakteristické rovnice).

Partikulární řešení budeme hledat ve tvrau:

$$\psi_p = x^0e^{0t}[A\cos(50t) + B\sin(50t)] = A\cos(50t) + B\sin(50t),$$

kde A, B jsou reálné konstanty.

Po úpravě získáme rovnost

$$(35A + 20B)\cos(50t) + (-20A + 35B)\sin(50t) = 0\cos(50t) - 2\sin(50t).$$

Porovnáním koeficientů u funkcí cos a sin získáme soustavu lineárních rovnic

$$35A + 20B = 0,\ -20A + 35B = -2,$$

která má právě jedno řešení $A = \frac{8}{325}$, $B = -\frac{14}{325}$. Získáme tedy partikulární řešení

$$\psi_p = \frac{8}{325}\cos(50t) - \frac{14}{325}B\sin(50t),$$

a obecné řešení:

$$\frac{8}{325}\cos(50t) - \frac{14}{325}B\sin(50t) + C_1e^{-100t}\cos(100t) + C_2e^{-100t}\sin(100t),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Požadavek splnění počátečních podmínek vede k soustavě

$$C_1 + \frac{8}{325} = 0,$$

$$-100C_1 + 100C_2 - \frac{700}{325} = 0,$$

která má jediné řešení $C_1 = -\frac{8}{325}$, $C_2 = -\frac{1}{325}$.

Řešením Cauchyovy úlohy je tedy funkce

$$\frac{38}{325}\cos(50t) - \frac{14}{325}B\sin(50t) - \frac{8}{325}e^{-100t}\cos(100t) - \frac{1}{325}e^{-100t}\sin(100t).$$

Tento výsledkek vlastně představuje člen $L\{(\varphi(t))\}$ ve vzorci pro rozptyl výstupu

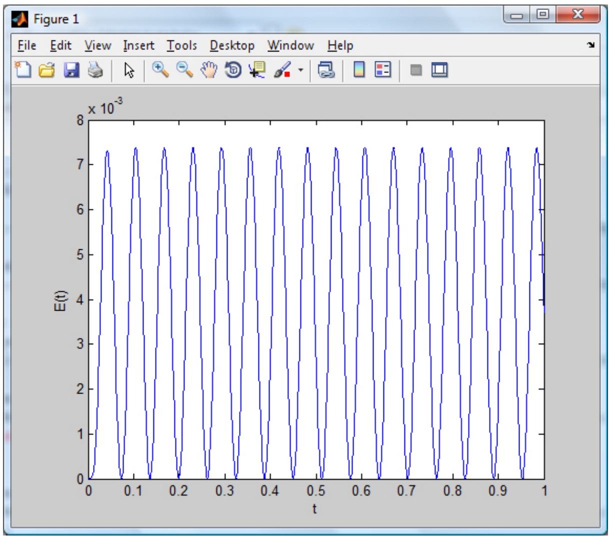
$$\sum_{i=1}^{m} L\{(\varphi(t))\}^2 D(V_i(\omega))$$

a člen $L\{\varphi_i(t)\}$ a po záměně proměnné t za t' i člen $L\{\varphi_i(t')\}$ ve vyorci pro autokorelační funkci výstupu.

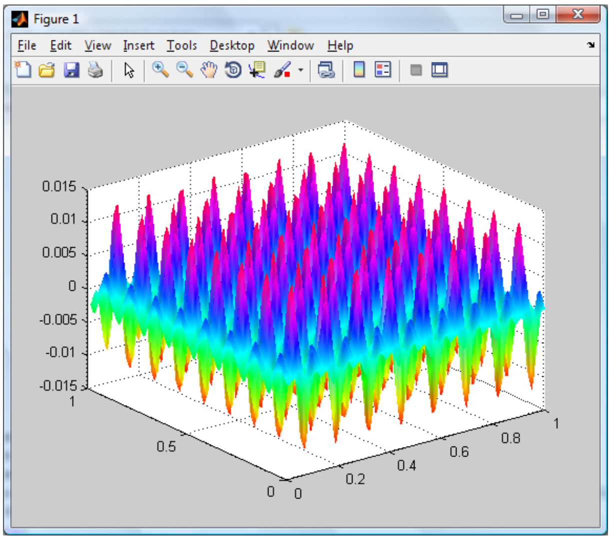
$$\sum_{i=1}^{m} L\{\varphi_i(t)\} L\left\{\varphi_i\left(t'\right)\right\} D(V_i(\omega)).$$

Po dosazení dosazení a zobrazení vzniklé funkce v MATLABU získáme následující grafy.

Porovnáme-li grafy vykreselené v MATLABu (obrázky 17, 18, 19) s grafickými výsledky (obrázky 14, 15, 16) zobrazenými aplikací, vidíme že jsou totožné.



Obrázek 18: Rozptyl zobrazená na základě předchozích výpočtů



Obrázek 19: Autokorelační funkce zobrazená na základě předchozích výpočtů

7 Závěr

V přiloženém programu je možné nasimulovat různé situace stochastického vstupu do sériového RLC obvodu a na názorných grafech si prohlédnout charakteristiky vstupního i výstupního náhodného procesu. Jak umožňuje linearita použitého operátoru L popsat tyto charakteristiky náhodných procesů na výstupu v závislosti na stochastickém vstupu, je popsáno v páté a šesté kapitole textu. Možné rozšíření této práce by bylo možné směrovat k optimalizaci výstupních charakteristik v závislosti na koeficientech lineární diferenciální rovnice druhého řádu - parametrech obvodu.

8 Literatura

[1] J. S. Vencel'ová, *Teória pravděpodobnosti*, 1. vydání, ALFA, Bratislava 1973

[2] B. Budinský, J. Charvát, *Matematika II.*, 1. vydání, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha 1990

[3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3. vydání, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 1996

[4] P. Kunderová, *Úvod do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky*, 1. vydání, Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc 1997

A Uživatelská příručka

Aplikace slouží jako řešič sériového RLC obvodu. Je v ní demonstrováno, jaký má vliv náhodné rušení na vstupu obvodu, na jeho výstup. Výstup, kterým je v tomto případě proud procházející obvodem, je získán vyřešením nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řadu. Díky grafickému uživatelskému rozhraní má uživatel možnost zadat konkrétní hodnoty charakterizující jednotlivé prvky obvodu a parametry jež představují náhodné vlivy působící na obvod. Grafickým výstupem jsou charakteristiky¨, které popisují vlastnosti vstupu a výstupu obvodu.

Aplikace je optimalizována pro verzi MATLABu R2008a, ve verzi R2008b z neznámých důvodu v průběhu výpočtů přestává pracovat. Při spuštění ve starších verzích není vyloučena možná chyba aplikace, zapříčíněna používaním nových funcí, jenž starší verze nepodporují.

A.1 Vstupní parametry obvodu

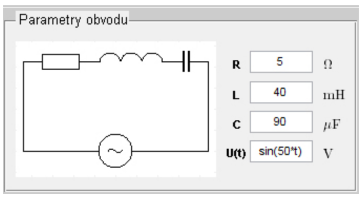
Zadávání vstupních parametrů obvodu je umožněno v panelu s názvem *Parametry obvodu* (obrázek 20), kde je rovněž zobrazeno schéma obvodu.

Editační pole s názvem R slouží k zadání ohmického odporu rezistoru, jenž je v obvodu zařazen. Uživatel zde zadá číselnou hodnotu, která vyjadřuje velikost odporu v Ohmech (Ω), čemuž napovídá popis za editačním polem.

Do editčního pole s názvem L uživatel taktéž vyplní číselnou hodnotu, která v tomto případě vyjadřuje velikost indukčnosti cívky v obvodu. Indukčnost je v tomto případě zadávána v rozměru miliHenry (mH).

Kapacitu kondenzátoru zařazeného v obvodu zadá uživatel číselnou hodnotou v mikroFaradech (μF) v editačním poli s názvem C.

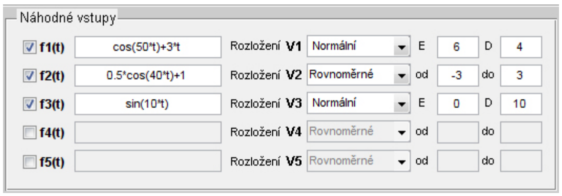
V tomto panelu poslední editační pole, s názvem U(t), je určeno k zadání vstupního střídavého napětí s rozměrem ve Voltech (V). Je nutné, aby tento parametr uživatel zadal formou funkce proměnné t.



Obrázek 20: Panel vstupních parametrů

A.2 Náhodné poruchy

V panelu s názvem *Náhodné poruchy* (obrázek 21) uživatel zadá hodnototy potřebné k sestavení popisu náhodných vlivů působících na obvod. Panel umožňuje zadání až pěti deterministických funcí a náhodných veličin, které popisují dílčí nahodné procesy rušení v obvodu a ve výsledném součtu obsáhnou celkový vliv ruchů. Je na volbě uživatele, kolik dílčích náhodných procesů se rozhodne definovat. Každý řádek v panelu je uvozen zatržítkem, jehož zatrhnutí zpřístupní následující editační pole k zápisu. S řádkem, který je zatržen počítá aplikace do svého řešení a nejsou-li následující položky vyplněny, vypíše se varovná hláška. V takové chvíli je nutné buď zrušit zatržení řádku, nebo vyplnit všechny položky.



Obrázek 21: Panel náhodných poruch

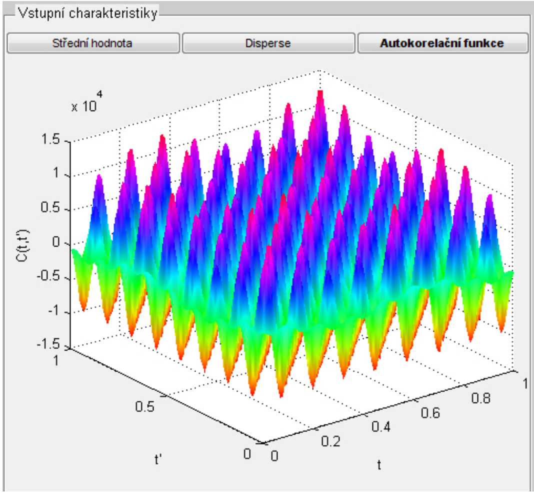
První editačním polem v řádku je pole s názvem f(1), do kterého uživatel zadá deterministickou funkci proměnné t v libovolném tvaru viz. (obrázek 21). Další v řadě je výběrové pole, jež umožňuje volbu typu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny V. Je možné zvolit ze dvou variant rozdělení, a to bud rovnoměrné, nebo normálni (Gaussovo). Je-li zvoleno rovnoměrné rozdělení, pak uživatel do následujících dvou editačních polí s názvy od a do vyplní horní a dolní mez intervalu, do kterého má náhodná veličina řídící se rovnoměrným rozdělením spadat. Obě tato pole předpokládají číselnou hodnotu vstupu. V opačném případě je-li zvoleno normální rozdělení náhodné veličiny V, zadává uživatel do editačního pole s názvem E číselně střední hodnotu příslušné náhodné veličiny, řídící se normálním rozdělením pravděpodobnosti, a do editačního pole s názvem D její rozptyl.

A.3 Vstupní charakteristiky

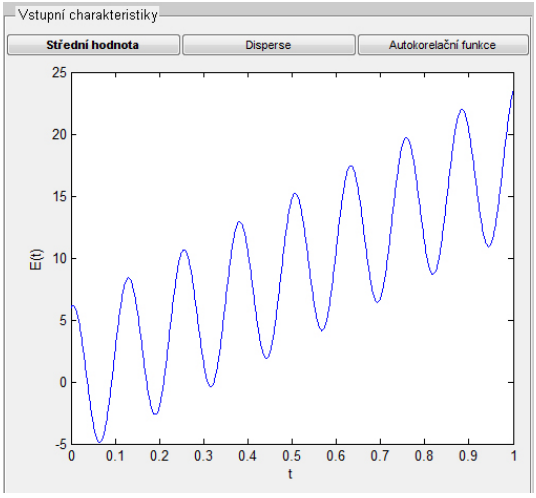
Prostor vymezený ke zobrazení vstupních charakteristik je součástí v panelu s názvem *Vstupní charakteristiky* (obrázek 22). Plátno se souřadnicovými osami, na které aplikace po provedení výpočtu vykreslí příslušné grafy, zabíra hlavní část tohoto panelu. Při horním okraji jsou umístěny záložky umožňující přepínání mezi jednotlivými grafy. Záložka s názvem *Střední hodnota* zobrazí 2D graf střední hodnoty vstupu. Obdobně záložka s názvem *Disperse* zobrazí 2D graf rozptyl vstupu a záložka s názvem *Autokorelační funkce* přepne zobrazení na 3D graf vstupní autokorelační funkce. Aktuálně zobrazená záložka je oproti ostatním vždy zvýrazněná.

A.4 Výstupní charakteristiky

Zobrazování výstupních charakteristik probíhá v panelu s názvem *Výstupní charakteristiky* (obrázek 23) a funguje naprosto stejným způsobem jako zobrazováni charakteristik vstupních. V horní části panelu jsou umístěny záložky s názvy *Střední hodnota*, *Disperse* a *Autokorelační funkce*, které umožňují přepínání mezi jednotlivými grafy vykreslujícími patřičné charakteristiky výstupu.



Obrázek 22: Panel vstupních charakteristik



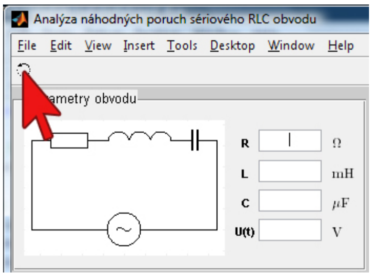
Obrázek 23: Panel výstupních charakteristik

A.5 Rotace

Aplikace umožňuje různým způsobem rotovat zobrazené grafy. Tato funkčnost se však projeví až po kliknutím na ikonu stočené šipky v horní liště aplikace (obrázek 24), následným přesunutím kurzoru do plátna se zobrazeným grafem, který chceme rotovat, a následným tažením v tomto grafu. Výsledkem jsou zobrazení pod různými úhly.

A.6 Ovládací tlačítka

K ovládání aplikace slouží tlačítka *Start* a *Reset* (obrázek25) umístěna pod panelem s počátečními podmínkami. Tlačítko *Start* spustí samotnou logiku aplikace, dojde k provední



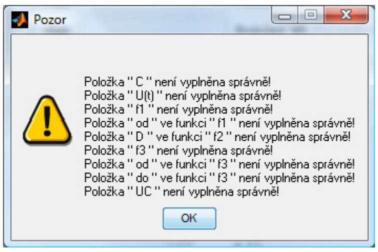
Obrázek 24: Ikona rotace

potřebných výpočtů a vykreslení grafů. Tlačítko s názvem *Reset* vymaže všechna editační pole, odstraní vykreslené grafy a připraví aplikaci pro nové zadání parametrů a následovné opětovné spuštění.

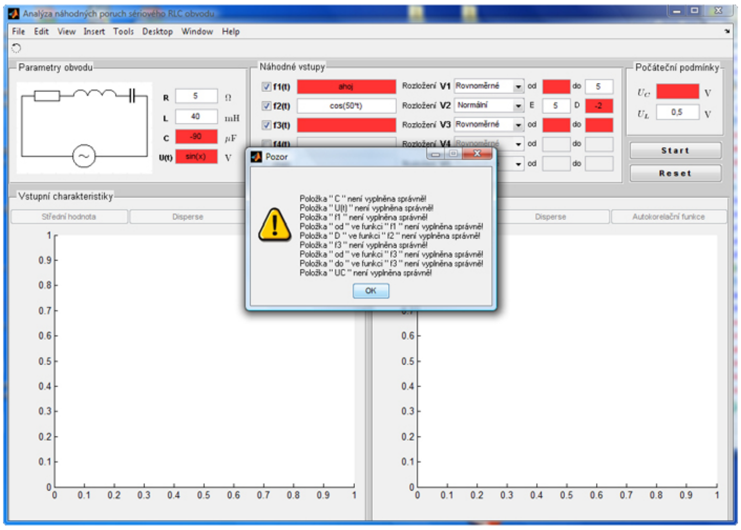
Obrázek 25: Ovládací tlačítka

A.7 Varovná upozornění

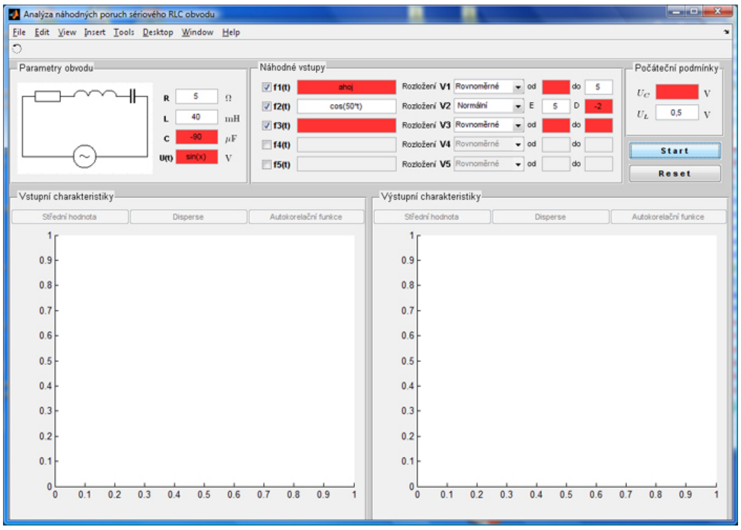
Jsou-li některá editační pole nesprávně vyplněna, nebo nevyplněna vůbec, aplikace na tuto situaci po stisknutí tlačítka *Start* patřičně reaguje (obrázek 27). Je vypsáno varovné upozornění (obrázek 26), v níž jsou uvedeny nekorektně zadané vstupy. Dále pak jsou chybné vstupy červenou barvou označeny přímo v grafickém uživatelském rozhraní a samozřejmě nedojde ke spuštění výpočtů a vykreslení grafů. V tomto případě je uživatel nucen zadat vstupy korektně (viz obrázek 28).



Obrázek 26: Varovná hláška



Obrázek 27: Reakce aplikace na nesprávné vstupy



Obrázek 28: Oprava chybných vstupů

B Lebesgueův - Stieltjesův integrál

B.1 Množinové funkce

Definice B.1 *Budiž dána množina $\Omega \neq \emptyset$. Neprázdný systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny Ω nazveme okruhem, pokud pro každé dvě množiny $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ platí*

$$A \cup B \in \mathcal{S}, \qquad A - B \in \mathcal{S}.$$

Poznámka B.1 Každý okruh zřejmě obsahuje prázdnou množinu.

Poznámka B.2 Z rovnosti $A \cap B = A - (A - B)$ ihned plyne, že každý okruh je uzavřený vzhledem ke konečným průnikům.

Definice B.2 *Okruh $\mathcal{S}$ nazveme $\sigma-$kruhem, je-li uzavřen vzhledem ke spočetným sjednocením, tj. platí*

$$\forall k \in \mathbb{N}: \; A_k \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}.$$

Poznámka B.3 Z rovnosti

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 - \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 - A_k)$$

plyne uzavřenost $\sigma-$okruhu vzhledem ke spočetným průnikům.

Definice B.3 *Jestliže systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny Ω je okruhem a $\Omega \in \mathcal{S}$, pak $\mathcal{S}$ nazýváme algebrou. Jestliže systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny Ω je $\sigma-$okruhem a $\Omega \in \mathcal{S}$, pak $\mathcal{S}$ nazýváme $\sigma-$algebrou.*

Definice B.4 *Řekneme, že na okruhu $\mathcal{S}$ je definována množinová funkce φ, jestliže dáno zobrazení φ, které každému $A \in \mathcal{S}$ přiřadí číslo $\varphi(A) \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.*

Definice B.5 *Nechť $\mathcal{S}$ je okruhem. Zobrazení $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^*$ nazveme aditivní funkcí na $\mathcal{S}$, jestliže pro každé dvě množiny $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ platí*

$$A \cap B = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$

Definice B.6 *Nechť $\mathcal{S}$ je okruhem. Řekneme, že $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^*$ je $\sigma-$aditivní funkcí na $\mathcal{S}$, jestliže pro každou posloupnost $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathcal{S}$ platí:*

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \forall l \in \mathbb{N}: \; A_k \cap A_l = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k).$$

Definice B.7 *Nechť $\mathcal{S}$ je okruhem. Řekneme, že množinová funkce φ na $\mathcal{S}$ je monotónní, jestliže pro každé dvě množiny $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ platí*

$$A \subset B \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(A) \leq \varphi(B).$$

Úmluva Dále budeme pracovat pouze s takovými množinovými funkcemi, jejichž obor hodnot současně neobsahuje $-\infty$ a ∞. Z našich úvah rovněž vyloučíme množinové funkce nabývající pouze hodnotu ∞, popřípadě $-\infty$.

Poznámka B.4 Je-li φ aditivní množinová funkce na okruhu $\mathcal{S}$, pak lze snadno postupně dokázat následující tvrzení:

- $\varphi(\emptyset) = 0$.
- $$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k),$$
  pro každou konečnou posloupnost $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ po dvou disjunktních prvků v $\mathcal{S}$.
- $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B)$, pro všechna $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$.
- Pokud je navíc φ nezáporná množinová funkce, pak všechna $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ platí
  $$A \subset B \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(A) \leq \varphi(B),$$
  tedy φ je monotónní.
- Pro všechny množiny $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ takové, že $A \subset B$, $|\varphi(B)| < \infty$ platí
  $$\varphi(B - A) = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Věta B.1 *Nechť $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^*$ je $\sigma-$aditivní funkcí na $\mathcal{S}$, $A \in \mathcal{S}$ a pro posloupnost $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathcal{S}$ platí:*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots, \qquad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Potom

$$\lim \varphi(A_n) = A.$$

B.2 Konstrukce měr v $\mathbb{R}^n$

Definice B.8 *Nechť $n \in \mathbb{N}$, a pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou dána konečná reálná čísla a_i, b_i. Intervalem v $\mathbb{R}^n$ budeme nazývat množinu všech bodů $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, takových, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí některá z možností:*

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad a_i < x_i \leq b_i, \quad a_i \leq x_i < b_i, \quad a_i < x_i < b_i.$$

Přitom nevylučujeme, že pro některá i je $a_i = b_i$ nebo dokonce $a_i > b_i$ (tedy také $\emptyset$ budeme chápat jako interval). Číslům a_i, b_i budeme říkat meze intervalu. Množinám, které lze vyjádřit jako konečná sjednocení intervalů budeme říkat elementární množiny. Systém všech elementárních množin v $\mathbb{R}^n$ budeme značit $\mathcal{E}$.

Definice B.9 *Je-li $I \neq \emptyset$ intervalem s mezemi a_1, b_1, a_2, $b_2, \ldots$, a_n, b_n, pak klademe*

$$\lambda_n(I) = \Pi_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Položme ještě

$$\lambda_n(\emptyset) = 0.$$

Nechť množinu $A \in \mathcal{E}$ lze vyjádřit jako sjednocení

$$A = \bigcup_{k=1}^{p} I_k,$$

kde předpokládáme, že systém $I_1, I_2, \ldots, I_p$ obsahuje pouze po dvou disjunktní intervaly. Potom klademe

$$\lambda_n(A) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_n(I_k).$$

Poznámka B.5 Všimněme si, že v případě $n = 1$ má m význam délky, pro $n = 2$ jde o vyjádření obsahu a je-li $n = 3$, půjde zřejmě o hodnotu objemu příslušné elementární množiny.

Definice B.10 *Nechť $n = 1$ a na reálné ose je definována rostoucí funkce α. Definujme funkci μ_α vztahy*

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha(\langle a, b)) &= \lim_{x \to b^-} \alpha(x) - \lim_{x \to a^-} \alpha(x),\\
\mu_\alpha(\langle a, b\rangle) &= \lim_{x \to b^+} \alpha(x) - \lim_{x \to a^-} \alpha(x),\\
\mu_\alpha((a, b\rangle) &= \lim_{x \to b^+} \alpha(x) - \lim_{x \to a^+} \alpha(x),\\
\mu_\alpha((a, b)) &= \lim_{x \to b^-} \alpha(x) - \lim_{x \to a^+} \alpha(x).
\end{aligned}$$

Rozšiřme ještě μ_α na okruh $\mathcal{E}$:

Nechť množinu $A \in \mathcal{E}$ lze vyjádřit jako sjednocení

$$A = \bigcup_{k=1}^{p} I_k,$$

kde předpokládáme, že systém $I_1, I_2, \ldots, I_p$ obsahuje pouze po dvou disjunktní intervaly. Potom klademe

$$\mu_\alpha(A) = \sum_{k=1}^{p} \mu_\alpha(I_k).$$

Pozorování Všimněme si, že

- $\mathcal{E}$ je okruhem, ale není $\sigma-$okruhem.
- Každou množinu $A \in \mathcal{E}$ lze vyjádřit jako konečné sjednocení po dvou disjunktních intervalů.
- Funkce λ_n, μ_α jsou koretně definované, hodnoty $\lambda_n(A)$, $\mu_\alpha(A)$ nezávisí na způsobu rozkladu množiny $A \in \mathcal{E}$ na sjednocení po dvou disjunktních intervalů.
- λ_n, μ_α jsou aditivními funkcemi na $\mathcal{E}$.

Definice B.11 *Nezápornou aditivní funkci φ definovanou na $\mathcal{E}$ nazveme regulární funkcí, jestliže pro každou množinu $A \in \mathcal{E}$ a každé $\epsilon > 0$ existuje uzavřená množina $F \in \mathcal{E}$ a otevřená množina $G \in \mathcal{E}$ takové, že platí*

$$F \subset A \subset G$$

a

$$\varphi(G) - \epsilon \leq \varphi(A) \leq \varphi(F) + \epsilon.$$

Pozorování

- λ_n je regulární funkce na $\mathcal{E}$.
- μ_α je regulární funkce na $\mathcal{E}$.

Nyní nastíníme proces, který povede ke vhodnému rozšíření regulární funkce na $\sigma-$aditivní funkci. Přitom zřejmě musíme také nalézt rozšíření množiny $\mathcal{E}$ na vhodný $\sigma-$okruh.

Definice B.12 *Nechť μ je nezáporná, aditivní, regulární a konečná množinová funkce na $\mathcal{E}$. Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina. Položme*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \; E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \; A_k \text{ jsou otevřené element. množ. v} \mathbb{R}^n\right\}.$$

Definovali jsme tak množinovou funkci μ^*, která libovolné podmnožině $E \subset \mathbb{R}^n$ přiřadí hodnotu $\mu^*(E) \in \langle 0, \infty \rangle$. Funkci μ^* budeme říkat vnější míra příslušná funkci μ.

Věta B.2
- *Je-li $A \in \mathcal{E}$, potom $\mu^*(A) = \mu(A)$.*
- *Jestliže*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad \text{kde } \forall k \in \mathbb{N}: \; E_k \subset \mathbb{R}^n,$$

potom

$$\mu^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

- **Definice B.13** *Pro každé dvě množiny $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ definujeme symetrický rozdíl $S(A,B)$ těchto množin vztahem*

$$S(A,B) = (A - B) \cup (B - A).$$

Je-li μ^* vnější mírou v $\mathbb{R}^n$, pak klademe

$$d(A,B) = \mu^*(S(A,B)).$$

Poznámka B.6 Lze dokázat, že pro libovolné tři množiny A, B, C v $\mathbb{R}^n$ a funkci d platí:

- $d(A,A) = 0,$
- $d(A,B) = d(B,A),$
- $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B).$

Funkce d tak splňuje téměř všechny požadavky kladené na metriku, nemusí však nabývat konečných hodnot a navíc obecně neplatí, že ze vztahu $d(A,B) = 0$ plyne $A = B$. Funkce d má ještě jednu zajímavou vlastnost. Pokud je alespoň jedno z čísel $\mu^*(A)$, $\mu^*(B)$ konečné, pak platí

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A,B).$$

Definice B.14 *Nechť $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost množin v $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Platí-li*

$$\lim d(A,A_k) = 0,$$

budeme psát

$$\lim A_k = A.$$

Označme symbolem $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ takový systém podmnožin prostoru $\mathbb{R}^n$, pro který platí

$$A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$$

právě tehdy, když existuje taková posloupnost elementárních množin $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, že

$$\lim A_k = A.$$

Prvkům systému $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ budeme říkat konečně $\mu-$měřitelné množiny. Označme ještě symbolem $\mathcal{M}(\mu)$ všechna spočetná sjednocení prvků z $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$, tedy platí

$$A \in \mathcal{M}(\mu)$$

právě tehdy, když existuje posloupnost $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ prvků množiny $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ taková, že

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Prvkům systému $\mathcal{M}(\mu)$ budeme říkat $\mu-$měřitelné množiny.

Věta B.3 *Systém množin* $\mathcal{M}(\mu)$ *je* $\sigma-$*algebrou a zúžení funkce* μ^* *na* $\mathcal{M}(\mu)$ *je* $\sigma-$*aditivní nezáporná funkce. Je-li* $A \in \mathcal{M}(\mu)$ *a* $\mu^*(A) < \infty$*, pak* $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$*.*

Poznámka B.7 Zúžení funkce μ^* na $\mathcal{M}(\mu)$ budeme dále značit μ. Zdůrazněme, že naznačeným postupem jsme vlastně rozšířili funkci μ, původně definovanou pouze na okruhu $\mathcal{E}$, na $\sigma-$algebru $\mathcal{M}(\mu)$. Zmíněné prodloužení μ budeme nazývat mírou. Ve speciálním případě, kdy jsme rozšiřovali výše definovanou funkci λ_n budeme hovořit o Lebesgueově míře λ_n na $\mathcal{M}(\lambda_n)$.

Definice B.15 *Řekneme, že množina* $E \subset \mathbb{R}^n$ *je borelovská, lze-li* E *vyjádřit pomocí spočetného počtu operací sjednocení, průniku a doplňku aplikovaných výhradně na otevřené podmnožiny* $\mathbb{R}^n$*.*

Poznámka B.8 Uveďme některé zajímavé vlastnosti míry v $\mathbb{R}^n$.

- Každou otevřenou množinu v $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení otevřených intervalů. Z toho ihned plyne, že $\mathcal{M}(\mu)$ obsahuje všechny otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$. Protože $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}(\mu)$ a $\mathcal{M}(\mu)$ je $\sigma-$algebrou, $\mathcal{M}(\mu)$ obsahuje rovněž všechny uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$.

- Pro každé $\epsilon > 0$ a každou množinu $A \in \mathcal{M}(\mu)$ existuje uzavřená množina F a otevřená množina G takové, že
$$F \subset A \subset G$$
a platí
$$\mu(G - A) < \epsilon, \quad \mu(F - A) < \epsilon.$$

- Systém všech borelovských množin v $\mathbb{R}^n$ tvoří (ve smyslu uspořádání pomocí inkluze) nejmenší $\sigma-$algebru v $\mathbb{R}^n$, která obsahuje všechny otevřené množiny. Z předchozího pak ihned plyne, že borelovské množiny jsou μ měřitelné vzhledem ke každé míře v $\mathbb{R}^n$.

- Lze dokázat, že je-li $A \in \mathcal{M}(\mu)$, pak existují borelovské množiny F, G takové, že $F \subset A \subset G$ a platí
$$\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0.$$
To lze interpretovat tak, že každou μ měřitelnou množinu lze vyjádřit jako sjednocení vhodné borelovské množiny a množiny, jejíž míra je nulová. Poznamenejme ještě, že zatímco borelovské množiny jsou vždy měřitelné, množina mající míru μ nulovou nemusí být vzhledem k jiné míře $\tilde{\mu}$ na $\mathbb{R}^n$ vůbec měřitelná.

- Systém množin jejíchž míra μ je nulová, tvoří vždy $\sigma-$okruh.

- Každá spočetná množina má Lebesgueovu míru nula. Existují ovšem také nespočetné množiny s nulovou Lebesgueovou mírou. Má-li množina Jordanovu míru nula, pak má také odpovídající Lebesgueovu míru nulovou.

B.3 Měřitelné prostory

V předchozí části jsme popsali možný způsob konstrukce měr v $\mathbb{R}^n$. V praxi je často potřeba rozumným zbůsobem „měřit” obecnější množiny.

Definice B.16 *Nechť je dán $\sigma-$okruh $\mathcal{S}$ podmnožin množiny Ω. Nechť je na $\mathcal{S}$ definována nezáporná a $\sigma-$aditivní funkce μ. Potom řekneme, že Ω je prostorem se systémem měřitelných množin $\mathcal{S}$ a mírou μ. Jestliže je navíc $\Omega \in \mathcal{S}$, tj. $\mathcal{S}$ je $\sigma-$algebrou, pak Ω nazýváme měřitelným prostorem.*

Definice B.17 *Nechť je dána trojice $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, kde $\mathcal{S}$ je $\sigma-$algebrou na Ω a P je takovou mírou, že $P(\Omega) = 1$. Pak $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ nazveme pravděpodobnostním prostorem a P pravděpodobností.*

B.4 Měřitelné funkce

Definice B.18 *Nechť je dán měřitelný prostor Ω se systémem měřitelných množin $\mathcal{S}$. Pak řekneme, že funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$, definovaná na Ω je měřitelná, jestliže pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina*

$$\{x \in \Omega : f(x) < a\}$$

měřitelnou množinou.

Poznámka B.9 Všimněme si, že pro měřitelnost funkce f není podstatná volba konkrétní míry na $\mathcal{S}$. Zvolme například $\Omega = \mathbb{R}^n$ a předpokládejme, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in \Omega : f(x) < a\}$ borelovská. Pak funkce f je měřitelná bez ohledu na to, jakou míru na $\mathbb{R}^n$ uvažujeme.

Definice B.19 *Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je borelovsky měřitelná, jestliže pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina*

$$\{x \in \Omega : f(x) < a\}$$

borelovskou množinou.

Věta B.4 *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- *Pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina*

  $$\{x \in \Omega : f(x) < a\}$$

  měřitelnou množinou.

- *Pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina*

  $$\{x \in \Omega : f(x) \leq a\}$$

  měřitelnou množinou.

- *Pro každé* $a \in \mathbb{R}$ *je množina*

$$\{x \in \Omega : f(x) > a\}$$

  měřitelnou množinou.

- *Pro každé* $a \in \mathbb{R}$ *je množina*

$$\{x \in \Omega : f(x) \geq a\}$$

  měřitelnou množinou.

Poznámka B.10 Z definice $\sigma-$okruhu nyní ihned plyne, že je-li f měřitelnou funkcí, pak pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je množina $f^{-1}(I)$ měřitelná.

Základní vlastnosti měřitelných množin jsou shrnuty v následující větě.

Věta B.5 *Nechť* f, g *jsou měřitelné funkce. Budiž funkce* F *spojitá na* $\mathbb{R}^2$*. Pak rovněž funkce*

- $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ *jsou měřitelné, speciálně* $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$ *jsou měřitelné funkce.*
- $h : \Omega \to \mathbb{R}$, $h(x) = F(f(x), g(x))$ *je měřitelná funkce, takže speciálně* $f + g$, $f \cdot g$ *jsou měřitelné funkce.*

Věta B.6 *Nechť* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je posloupnost měřitelných funkcí na* Ω*. Potom funkce*

$$G : \Omega \to \mathbb{R},\ G(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x), \qquad H : \Omega \to \mathbb{R},\ H(x) = \limsup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x),$$

$$g : \Omega \to \mathbb{R},\ g(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x), \qquad h : \Omega \to \mathbb{R},\ h(x) = \liminf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x),$$

jsou měřitelné funkce. Speciálně je tedy limita posloupnosti měřitelných funkcí na Ω *opět měřitelnou funkcí.*

Poznámka B.11 Z výše uvedených vět plyne, že měřitelnost funkce zůstává zachována při obvyklých matematických operacích. Pozor si však musíme dát při skládání funkcí. Například lze ukázat, že existuje funkce $f \circ g$, která není měřitelná a přitom vznikne složením měřitelné funkce f a spojité funkce g.

B.5 Jednoduché funkce

Definice B.20 *Řekneme, že funkce* $s : \Omega \to \mathbb{R}$ *je jednoduchá, pokud nabývá pouze konečně mnoha hodnot. Speciálně, je-li dána množina* $E \subset \Omega$*, potom jednoduchou funkci*

$$\chi_E : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{je} - \text{li } x \in E, \\ 0, & \text{pokud } x \in \Omega - E \end{cases}$$

nazýváme charakteristickou funkcí množiny E.

Poznámka B.12 Předpokládejme, že obor hodnot jednoduché funkce s je množina $\{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$. Označme

$$E_k = \{x \in \Omega : \ s(x) = c_k\}, \quad \text{pro}\, k \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Pak můžeme funkci s zapsat ve tvaru lineární kombinace

$$s(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k \cdot \chi_{E_k}(x).$$

Odtud je zřejmé, že s je měřitelnou funkcí právě tehdy, když jsou všechny množiny $E_1, E_2, \ldots, E_p$ měřitelné.

Věta B.7 *Nechť f je funkce definovaná na množině Ω. Pak existuje posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ jednoduchých funkcí taková, že pro každé $x \in \Omega$ platí*

$$f(x) = \lim s_k(x).$$

Jestliže funkce f je měřitelná, pak posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ lze zvolit tak, aby každý její člen s_k byl měřitelnou funkcí. Pokud je funkce f nezáporná, potom existuje rostoucí posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodově konvergující k f na Ω. Pokud je funkce f nezáporná a měřitelná, potom lze nalézt rostoucí posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ měřitelných funkcí, která bodově konverguje k f na Ω.

B.6 Lebesgueův-Stieltjesův integrál

Úmluva Nechť je dán měřitelný prostor Ω s mírou μ. Nechť $E \subset \Omega$ je měřitelná množina. Ke každé nezáporné jednoduché měřitelné funkci $s : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$s(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k \cdot \chi_{E_k}(x), \qquad (c_k > 0),$$

přiřaďme číslo

$$I_E(s) = \sum_{k=1}^{p} c_k \cdot \mu(E \cap E_k).$$

Definice B.21 *Nechť je dán měřitelný prostor Ω s mírou μ. Nechť $E \subset \Omega$ je měřitelná množina. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na Ω. Označme symbolem $\mathcal{D}$ systém všech jednoduchých měřitelných funkcí s takových, že na Ω platí $0 \le s(x) \le f(x)$. Pak číslo*

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{s \in \mathcal{D}} I_E(s)$$

nazýváme Lebesgueovým-Stieltjesovým integrálem funkce f na množině E.

Poznámka B.13

- Může se stát, že $\int_E f \mathrm{d}\mu = \infty$.
- Pro každou jednoduchou nezápornou měřitelnou funkci s zřejmě platí

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu = I_E(s).$$

Nyní rozšíříme definici integrálu. Připomeňme nejdříve, že k zadané funkci f můžeme přiřadit dvě nezáporné funkce f^+, f^- takto:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Definice B.22 *Nechť je dán měřitelný prostor Ω s mírou μ. Nechť $E \subset \Omega$ je měřitelná množina. Nechť f měřitelná funkce na Ω. Nechť alespoň jeden z integrálů*

$$\int_E f^+ \, d\mu, \qquad \int_E f^- \, d\mu$$

je konečný.Pak číslo

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

nazveme Lebesgueovým-Stieltjesovým integrálem funkce f na množině E. Jestliže tento integrál je konečný, tj.

$$\int_E f \, d\mu \in \mathbb{R},$$

pak řekneme, že f je integrovatelná na E (v Lebesgueově-Stieltjesově) smyslu a budeme psát $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na E. Ve speciálním případě volby Lebesgueovy míry λ_n budeme hovořit o Lebesgueově $n-$rozměrném integrálu a stručně psát $f \in \mathcal{L}$ místo $f \in \mathcal{L}(\lambda_n)$.

Pozorování

- Je-li $\mu(E) < \infty$ a f je měřitelná, přičemž existují čísla $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ taková, že

  $$\forall x \in E: \quad a \leq f(x) \leq b,$$

  pak platí

  $$a \cdot \mu(E) \leq \int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq b \cdot \mu(E),$$

  tedy $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na E.

- Pokud $f \in \mathcal{L}(\mu)$, $g \in \mathcal{L}(\mu)$ na E a platí

  $$\forall x \in E: \quad f(x) \leq g(x),$$

  pak platí

  $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

- Nechť $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na E, $c \in \mathbb{R}$. Pak
$$\int_E (c \cdot f)\, \mathrm{d}\mu = c \cdot \int_E f\, \mathrm{d}\mu.$$
- Je-li f měřitelná funkce a $\mu(E) = 0$, pak
$$\int_E f\, \mathrm{d}\mu = 0.$$
- Nechť $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na E, $A \subset E$ je měřitelná množina. Potom $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na A.

Poznámka B.14 Budiž zadán měřitelný prostor Ω se $\sigma-$algebrou $\mathcal{S}$ a mírou μ. Nechť f je nezáporná a měřitelná funkce na Ω. Pak můžeme definovat funkci
$$\varphi : \mathcal{S} \to \langle 0, \infty \rangle, \qquad \varphi(A) = \int_A f\, \mathrm{d}\mu.$$
Lze dokázat, že funkce φ je $\sigma-$aditivní, takže jsme popsaným způsobem pomocí funkce f vytvořili novou míru φ na $\mathcal{S}$.

Věta B.8 *Uvažujme měřitelný prostor Ω se $\sigma-$algebrou $\mathcal{S}$ a mírou μ. Nechť $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na Ω. Pak funkce*
$$\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(A) = \int_A f\, d\mu.$$
je $\sigma-$aditivní.

Důsledek Nechť f je měřitelná funkce. Je-li množina A měřitelná, $B \subset A$, $\mu(A - B) = 0$, potom
$$\int_A f\, \mathrm{d}\mu = \int_B f\, \mathrm{d}\mu, .$$
pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Poznámka B.15 Z právě uvedeného důsledku plyne, že při integraci lze ,,beztrestně" zanedbat množiny nulové míry.

Úmluva Nechť E je měřitelná množina a pro měřitelné funkce f, g platí, že
$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$
Pak budeme psát $f \sim g$ na E. Relace $\sim$ je zřejmě relací ekvivalence na systému měřitelných funkcí. Vzhledem k výše uvedenému důsledku je tedy zřejmé, že pro libovolnou měřitelnou množinu $A \subset E$ a dvojici $f \sim g$ na E platí rovnost
$$\int_A f\, \mathrm{d}\mu = \int_A g\, \mathrm{d}\mu,$$
jakmile uvedené integrály existují. Navíc se domluvme, že jakmile je E měřitelná množina a vlastnost P platí pro každé $x \in E - A$, kde $\mu(A) = 0$, pak řekneme, že vlstnost P mají skoro všechna $x \in E$ (vzhledem k míře μ).

Poznámka B.16 Jestliže $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na E, pak nutně musí nabývat skoro všude na E konečných hodnot. Proto můžeme ve většině tvrzení předpokládat bez ztráty obecnosti, že funkce $f \in \mathcal{L}(\mu)$ nabývají pouze konečných hodnot.

Věta B.9 *Jestliže $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na E, potom $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$ na E a platí*

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |g| \, d\mu.$$

Poznámka B.17 Lebesgueův-Stieltjesův integrál je tedy příkladem absolutně konvergentního integrálu. Poznamenejme, že tuto vlastnost postrádá například Riemannův nevlastní integrál.

Věta B.10 *(Lebesgueova o kovergenci v případě monotónní posloupnosti) Budiž E měřitelná množina a posloupnost nezáporných měřitelných funkcí $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesající na E, to znamená, že platí*

$$\forall x \in E: \quad 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$$

Nechť funkce f je definována předpisem

$$\forall x \in E: \quad f(x) = \lim f_k(x).$$

Potom

$$\lim \int_E f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Jako důsledek předchozí věty lze odvodit, že platí:

Věta B.11 *Nechť $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na E, $g \in \mathcal{L}(\mu)$ na E. Potom $(f+g) \in \mathcal{L}(\mu)$ na E a platí*

$$\int_E (f+g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Věta B.12 *(Lebesgueova o kovergenci v případě ohraničené posloupnosti) Budiž E měřitelná množina a posloupnost měřitelných funkcí $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodově konverguje na E k funkci f, to znamená, že platí*

$$\forall x \in E: \quad \lim f_k(x) = f(x).$$

Nechť posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je navíc stejně omezená integrovatelnou funkcí, to znamená, že existuje funkce $g \in \mathcal{L}(\mu)$taková, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in E$ platí:

$$|f_k(x)| \leq g(x).$$

Pak $f \in \mathcal{L}(\mu)$ a platí

$$\lim \int_E f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Potom

$$\lim \int_E f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

B.7 Lebesgueův a Riemannův integrál

Věta B.13 *Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina a f je funkce definovaná a omezená na D. Pak platí:*

- *Existuje -li Riemannův integrál*

  $$(\mathcal{R}) \int_D f(x)\ dx,$$

  potom existuje i Lebesgueův integrál

  $$(\mathcal{L}) \int_D f\, d\lambda_n,$$

  a oba integrály jsou si rovny.

- *Integrál $(\mathcal{R}) \int_D f(x)\ dx$ existuje právě tehdy, když hranice $\lambda_n(\partial D) = 0$ a současně má nulovou Lebesgueovu míru množina vnitřních bodů množiny D, ve kterých f není spojitá.*

Konkrétní výpočet hodnoty Lebesgueova integrálu tak lze v řadě případů provést výpočtem příslušného integrálu Riemannova. Někdy lze využít k výpočtům také výše uvedené Lebesgueovy konvergenční věty.

C Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

C.1 Základní pojmy a věta o existenci řešení

Obecné pojmy

Nechť f je reálná funkce $n+1$ reálných proměnných. Potom rovnici

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{8}$$

nazveme *obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu.*

Funkci $y = \varphi(x)$, jejímž definičním oborem je otevřený interval $J \subset \mathbb{R}$, nazýváme *řešením diferenciální rovnice* (8) *na intervalu* J, jestliže pro každé $x \in J$ platí

$$\varphi^n(x) = f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)\right).$$

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu nazýváme rovnici tvaru

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x), \tag{9}$$

kde $p_1, ..., p_n, q$ jsou funkce jedné proměnné. V celé této části kapitoly budeme předpokládat, že definičním oborem funkcí $p_1, ..., p_n, q$ je jistý interval (a, b) a že všechny tyto funkce jsou na (a, b) spojité. Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, tj. jestliže rovnice (9) má tvar

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \tag{10}$$

nazýváme ji *homogenní rovnicí.* V opačném případě je rovnice nehomogenní.

Věta C.1 *(O existenci a jednoznačnosti řešení)*
Nechť definičním oborem funkcí $p_1, ..., p_n, q$ je interval (a, b) a nechť všechny tyto funkce jsou na (a, b) spojité. Nechť $x_0 \in (a, b)$ a nechť $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ jsou libovolná reálná čísla. Potom existuje právě jedno řešení φ diferenciální rovnice (9) na intervalu (a, b), pro které platí

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0', \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{11}$$

Přitom každé řešení rovnice (9) vyhovující podmínkám (11) je restrikcí tohoto řešení φ.

Poznámka C.1 Podmínkám (11) se často říká počáteční podmínky a úloze najít řešení φ rovnice (9) vyhovující podmínkám (11) Cauchyova úloha.

Věta C.2 *Nechť definičním oborem funkcí $p_1, ..., p_n, q$ je interval (a, b) a nechť všechny tyto funkce jsou na (a, b) spojité. Označme Y_H množinu všech řešení diferenciální rovnice (10) na intervalu (a, b). Potom Y_H je vektorový podprostor vektorového prostoru $\mathbb{F}$ všech funkcí definovaných na intervalu (a, b).*

Definice C.1 *Nechť* $(f_1, ..., f_n)$ *je uspořádaná n-tice funkcí jedné proměnné, jejichž definičním oborem je interval* (a, b)*. Předpokládejme, že funkce* $f_1, ..., f_n$ *mají na intervalu* (a, b) *všechny derivace až do* $(n-1)$*-ho řádu. Nechť* $x \in (a, b)$*. Potom determinant*

$$W(f_1, ..., f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x), & f_2(x), & ..., & f_n(x) \\ f_1'(x), & f_2'(x), & ..., & f_n'(x) \\ ....., & ....., & ....., & ..... \\ f_1^{(n-1)}(x), & f_2^{(n-1)}(x), & ..., & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazýváme Wronského determinant *skupiny funkcí* $(f_1, ..., f_n)$ *v bodě* x*.*

Věta C.3 *Nechť* $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ *je skupina n funkcí, z nichž každá je řešením homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (10) na intervalu* (a, b)*. Označme* $W(x) = W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x), x \in (a, b)$*. Potom skupina funkcí* $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ *je lineárně závislá, resp. nezávislá, ve vektorovém prostoru* $\mathbb{F}$ *všech funkcí definovaných na* (a, b)*, právě tehdy, když pro každé* $x \in (a, b)$ *platí* $W(x) = 0$*, resp.* $W(x) \neq 0$*.*

Věta C.4 *Dimenze vektorového prostoru* Y_H *všech řešení diferenciální rovnice (10) na intervalu* (a, b) *je rovna číslu n.*

Definice C.2 *Libovolnou bázi vektorového prostoru* Y_H *všech řešení diferenciální rovnice (10) na intervalu* (a, b) *nazveme* fundamentální systém řešení *této diferenciální rovnice.*

Poznámka C.2 Fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (10) je tedy libovolná skupina n lineárně nezávislých řešení této rovnice. Takových fundamentálních systémů existuje samozřejmě nekonečně mnoho. Abychom vyřešili rovnici (10), stačí najít jeden z nich. Je-li tvořen například funkcemi $\varphi_1, ..., \varphi_n$ potom všechna řešení uvažované rovnice na intervalu (a, b) dostaneme jako všechny lineární kombinace funkcí $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Obecné řešení rovnice (10) má tedy tvar

$$y = C_1\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_n(x), C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}.$$

Věta C.5 *Nechť definičním oborem funkcí* $p_1, ..., p_n, q$ *je interval* (a, b) *a nechť všechny tyto funkce jsou na* (a, b) *spojité. Označme* Y_N *množinu všech možných řešení diferenciální rovnice (9) na intervalu* (a, b)*. Nechť* Y_H *a* $\mathbb{F}$ *značí totéž, co ve větě (C.2). Potom platí, že*

$$Y_N = \varphi_p + Y_H = \{\varphi_p + \varphi \in \mathbb{F} : \varphi \in Y_H\},$$

kde φ_p *je libovolé pevné řešení nehomogenní rovnice (9) na intervalu* (a, b)*.* Y_N *je tedy lineární množina dimenze n ve vektorovém prosotru* $\mathbb{F}$ *všech funkcí definovaných na* (a, b)*.*

Poznámka C.3 Z věty (C.5) vyplývá, že pokud $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ je fundamentální systém řešení homogenní rovnice (10) a φ_p libovolné (partikulární) řešení nehomogenní rovnice (9), potom můžeme obecné řešení nehomogenní rovnice (9) psát ve tvaru

$$y = \varphi_p(x) + C_1\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_n(x), C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$$

C.2 Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

V této kapitole se budeme zabývat hledáním fundamentálního systému řešení homogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{12}$$

kde $p_1, ..., p_n$ jsou reálná čísla (nebo přesněji konstantní funkce definované na $\mathbb{R}$).

Nejdříve se budeme podrobně věnovat případu pro $n = 2$, tj. rovnici

$$y'' + p_1 y' + p_2 = 0 \tag{13}$$

a potom stručně ukážeme, jak bychom našli fundamentální systém řešení rovnice (12) pro obecné n.

Charakteristická rovnice

Zkusme, zda by řešením rovnice (13) mohla být pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ funkce

$$\varphi(x) = e^{\lambda x}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Snadno vypočteme, že

$$\varphi'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \ \varphi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Dosadíme-li funkci (14) do rovnice (13), dostaneme

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2\right) = 0.$$

Odtud je vidět, že funkce (14) je řešením rovnice (13), když platí

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0 \tag{15}$$

Kvadratická rovnice (15) pro neznámou λ se nazývá charakteristická rovnice diferenciální rovnice (13).

Konstrukce fundamentálního systému řešení diferenciální rovnice (13) na základě znalosti kořenů její charakteristické rovnice

Pro charakteristickou rovnici (15) nastane vždy jeden z následujících tří navzájem se vylučujících příkladů:

1. Charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2.
2. Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen λ_1.
3. Charakteristická rovnice má dva navzájem komplexně sdružené imaginární kořeny $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ a $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Ad 1.

V tomto případě jsou funkce

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} \tag{16}$$

řešením rovnice (13) na $\mathbb{R}$. Protože Wronského determinant

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1)$$

je pro každé $x \in \mathbb{R}$ různý od nuly, jsou funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ podle věty (C.3) lineárně nezávislé a tvoří tedy fundamentální systém řešení rovnice (13). Obecné řešení uvažované rovnice má v tomto případě tvar

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Ad 2.

V tomto případě jsou řešením rovnice (13) na $\mathbb{R}$ funkce

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ \varphi_2(x) = x e^{\lambda_2 x} \tag{18}$$

U φ_1 je to zřejmé, u funkce φ_2 se o tom snadno přesvědčíme dosazením rovnice (13), přičemž využijeme skutečnost, že diskriminant charakteristické rovnice je roven nule.

Protože Wronského determinant

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} + \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x}$$

je pro každé $x \in \mathbb{R}$ různý od nuly, jsou funkce φ_1, φ_2 lineárně nezávislé a tvoří tedy fundamentální systém řešeni rovnice (13). Její obecné řešení má tentokrát tvar

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Ad 3.

Tvrdíme, že v tomto případě jsou řešením rovnice (13) na $\mathbb{R}$ funkce

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ \varphi_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \tag{20}$$

Výpočty se lze přesvědčit, uvedené funkce jsou řešením zadané rovnice, a že Wronského determinant je pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Funkce φ_1, φ_2 tedy v tomto případě tvoří fundamentální systém řešení rovnice (13) a její obecné řešení má tvar

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{21}$$

Homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Uvažujme rovnici (12). Stejným způsobem jako pro $n = 2$ bychom obdrželi její tzv. charakteristickou rovnici

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \tag{22}$$

Nyní řekneme, jak každému kořenu rovnice (22), s ohledem na jeho násobnost, přiřadíme jistou funkci tak, aby takto zkonstruované funkce tvořily fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (12) na $\mathbb{R}$. Rovnice (22) může mít kořeny dvojího druhu: reálné a imaginární.

Reálnému kořenu λ, jehož násobnost je k, přiřadíme tuto k-tici funkcí:

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda x},\ \varphi_2(x) = xe^{\lambda x},\ ...,\ \varphi_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

Imaginárnímu kořenu $\alpha + i\beta$ spolu s komplexně sdruženým kořenem $\alpha - i\beta$, z nichž každý má násobnost l , přiřadíme těchto $2l$ funkcí:

$$\psi_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \psi_2(x) = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ ...,\ \psi_l(x) = x^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\psi_{l+1}(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \psi_{l+2}(x) = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ ...,\ \psi_{2l}(x) = x^{l-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Jelikož charakteristická rovnice (22) má přesně n kořenů, získáme tímto způsobem n funkcí. Lze dokázat, že těchto n funkcí tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (12) na $\mathbb{R}$.

Poznámka C.4 V předchozí části jsme si ukázali, jak se hledá fundamentální systém řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Na první pohled se může zdát, že si nyní s každou takovou rovnicí snadno poradíme. Není tomu tak, neboť pro $n > 4$ neexistuje explicitní vzorec pro výpočet kořenů charakteristické rovnice. Prakticky už $n \geqq 3$ se v obecném případě kořeny hledají pomocí přibližných metod numerické matematiky.

C.3 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

V této kapitole se budeme zabývat nehomogenní lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_ny = q(x) \tag{23}$$

kde funkce q je funkce, jejímž definičním oborem je jistý interval (a, b), a která je na (a, b) spojitá a $p_1, ..., p_n$ jsou daná reálná čísla.

Připomeňme, že množina Y_N všech řešení diferenciální rovnice (23) na (a, b) je lineární množina dimenze n, a sice $Y_N = \varphi_p + Y_H$, kde φ_p je libovolné pevné řešení rovnice (23) na (a, b) a kde Y_H je vektorový prostor všech řešení přiřazené homogenní rovnice na

(a,b). Hledát Y_H jsme se naučili v předcházející kapitole. Nyní se zaměříme na výpočet partikulárního řešení φ_p rovnice (23).

Toto partikulární řešení φ_p budeme hledat dvěma způsoby: tzv. variací konstant a tzv. metodou speciální pravé strany. Výhodou prvního postupu je jeho použitelnost pro libovolnou spojitou funkci q na pravé straně rovnice (23), nevýhodou pak jeho poměrná pracnost a hlavně skutečnost, že vede na výpočet integrálů. Druhý postup má výhodu v jednoduchém výpočtu, avšak lze jej použít jen pro některé speciální případy funkce q.

Variace konstant

Předpokládejme, že jsme už vyřešili homogenní rovnici

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{24}$$

a že její obecné řešení je

$$y = C_1 \varphi_1 (x) + ... + C_n \varphi_n (x) \, , \; C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Hledejme partikulární řešení φ_p nehomegenní rovnice (23) ve tvaru formálně podobném (25), kde ovšem místo konstant $C_1, ..., C_n$ budeme psát nějaké (prozatím neznámé) funkce $g_1, ..., g_n$ proměnné x, tedy

$$\varphi_p = g_1 (x) \varphi_1 (x) + ... + g_n (x) \varphi_n (x) \, , \; x \in (a,b) \tag{26}$$

Dosazením funkce φ_p do rovnice (23) dostaneme jednu podmínku pro n neznámých funkcí $g_1, ..., g_n$. Lze určit, že funkcí $g_1, ..., g_n$ těchto vlastností existuje nekonečně mnoho a že takové funkce bude možné vypočítat i tehdy, stanovíme-li pro ně ještě dalších $n-1$ dodatečných podmínek. Tyto dodatečné podmínky, jak uvidíme dále, budeme volit tak, aby výpočty byly pokud možno co nejjednodušší.

Abychom funkci φ_p mohli dosadit do rovnice (23), musíme spočítat její derivace $\varphi_p', ..., \varphi_p^{(n)}$. Předně

$$\varphi_p' (x) = g_1' (x) \varphi_1 (x) + g_1 (x) \varphi_1' (x) + ... + g_n' (x) \varphi_n (x) + g_n (x) \varphi_n' (x) \, ,$$

$x \in (a,b)$. První ze slíbených dodatečných podmínek pro funkce $g_1, ..., g_n$ volíme tak, aby se v předpisu pro funkci φ_p'' neobjevily druhé derivace funkcí $g_1, ..., g_n$.

Položíme tedy

$$g_1' (x) \varphi_1 (x) + ... + g_n' (x) \varphi_n (x) = 0, \; x \in (a,b) \, . \tag{27}$$

Za tohoto předpokladu je

$$\varphi_p' (x) = g_1 (x) \varphi_1' (x) + ... + g_n (x) \varphi_n' (x) \, , \; x \in (a,b) \, ,$$

a dále

$$\varphi_p'' (x) = g_1' (x) \varphi_1' (x) + g_1 (x) \varphi_1'' (x) + ... + g_n' (x) \varphi_n' (x) + g_n (x) \varphi_n'' (x) \, , \; x \in (a,b) \, .$$

Opět položíme

$$g_1'(x)\varphi_1'(x)+...+g_n'(x)\varphi_n'(x)=0,\ x\in(a,b)\,. \tag{28}$$

Potom

$$\varphi_p''(x)=g_1(x)\varphi_1''(x)+...+g_n(x)\varphi_n''(x)\,,\ x\in(a,b)\,.$$

Pokračujeme-li stejným způsobem dále a položíme-li v derivacích $\varphi_p''', ..., \varphi_p^{(n-1)}$ vždy součet výrazů, v nichž se vyskytují derivace funkcí $g_1, ..., g_n$, roven nule obdržíme spolu s (27) a (28) těchto $n-1$ dodatečných podmínek pro funkce $g_1, ..., g_n$:

$$\begin{array}{llll} g_1'(x)\varphi_1(x)+ & ... & +g_n'(x)\varphi_n(x) & =0 \\ g_1'(x)\varphi_1'(x)+ & ... & +g_n'(x)\varphi_n'(x) & =0 \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ g_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x)+ & ... & +g_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) & =0 \end{array} \tag{29}$$

kde $x\in(a,b)$. Platí-li (29), je pro každé $x\in(a,b)$

$$\begin{array}{llll} \varphi_p'(x) & =g_1(x)\varphi_1'(x) & +...+ & g_n(x)\varphi_n'(x) \\ \varphi_p''(x) & =g_1(x)\varphi_1''(x) & +...+ & g_n(x)\varphi_n''(x) \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ \varphi_p^{(n-1)}(x) & =g_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) & +...+ & g_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) \\ \varphi_p^{(n)}(x) & =g_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) & +...+ & g_n(x)\varphi_n^{(n)}(x)+ \\ & +g_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) & +...+ & g_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)\,. \end{array} \tag{30}$$

Dosadíme-li z (26) a (30) do rovnice (23) a využijeme-li skutečnost, že funkce $\varphi_1, ..., \varphi_n$ jsou řešení rovnice (24), tj. že pro každé $i\in\{1,...,n\}$ a pro každé $x\in(a,b)$ platí

$$\varphi_i^{(n)}(x)+p_1\varphi_i^{(n-1)}(x)+...+p_{n-1}\varphi_i'(x)+p_n\varphi_i(x)=0,$$

dostaneme pro funkce $g_1, ..., g_n$ rovnost

$$g_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x)+...+g_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)=q(x)\,, \tag{31}$$

kde $x\in(a,b)$.

Pro každé pevné $x\in(a,b)$ jsme obdrželi soustavu n lineárních algebraických rovnic pro neznámé $g_1'(x), ..., g_n'(x)$, a sice soustavu tvořenou rovnicemi (29) a rovnicí (31):

$$\begin{array}{llll} g_1'(x)\varphi_1(x) & +...+ & g_n'(x)\varphi_n(x) & =0 \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ g_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) & +...+ & g_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) & =0 \\ g_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) & +...+ & g_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) & =q(x) \end{array} \tag{32}$$

Determinantem této soustavy je Wronského determinant $W(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x)$, který je podle věty (C.3), různý od nuly. Soustava lineárních rovnic (32) má tedy právě jedno řešení. Uvědomíme-li si, pomocí jakých operací bychom při řešení soustavy (32) její neznámé $g_1'(x), ..., g_n'(x)$ počítali (ať už Gausovou eliminační metodou nebo třeba Cramerovým pravidlem), vidíme, že ze spojitosti funkce q na intervalu (a, b) vyplývá, že také všechny funkce $g_1', ..., g_n'$ jsou na na (a, b) spojité. Funkce $g_1', ..., g_n'$ mají tedy na intervalu (a, b) primitivní funkce. Vypočteme-li k ním nějaké primitivní funkce $g_1, ..., g_n$, což v konkrétních případech nemusí být jednoduché, a dosadíme-li je do (26), získáme hledané partikulární řešení diferenciální rovnice (24).

C.3.1 Metoda speciální pravé strany

Uvažujme opět diferenciální rovnici (23). Předpokládejme, že její pravá strana má tvar

$$q(x) = e^{\alpha x} \left(P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x) \right), \tag{33}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $P_1(x)$ a $P_2(x)$ jsou polynomy. Lze dokázat, že v takovém případě má rovnice (23) na $\mathbb{R}$ právě jedno řešení φ_p tvaru

$$\varphi_p(x) = x^k e^{\alpha x} \left(Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x) \right), \tag{34}$$

kde k je násobnost čísla $\alpha + i\beta$ (a tedy i čísla $\alpha - i\beta$) jakožto kořene charakteristické rovnice přiřazené homogenní rovnice (24). Pokud $\alpha + i\beta$ není kořenem charakteristické rovnice, potom k =0. $Q_1(x), Q_2(x)$ jsou polynomy, jejichž stupně jsou nejvýše rovny vyššímu ze stupňů polynomů $P_1(x), P_2(x)$.

V konkrétních příkladech postupujeme tak, že zatím neznámé koeficienty polynomů $Q_1(x), Q_2(x)$ označíme nějakými písmeny, funkci φ_p n-krát zderivujeme dosadíme do rovnice (34). Porovnáním levé a pravé strany získané rovnosti (platné na celém $\mathbb{R}$) pak dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic pro hledané koeficienty polynomů $Q_1(x)$ a $Q_2(x)$, a to soustavu, která má právě jedno řešení. Toto řešení vypočteme a dosadíme do (23).

Poznámka C.5 V případě, že $\alpha = 0, \beta = 0$ nebo že některý z polynomů $P_1(x), P_2(x)$ je nulový nebo konstantní, má pravá strana (33) např. tvar

$$P_1(x), \cos(\beta x), P_2(x) \sin(\beta x), e^{\alpha x}, P_1(x) e^{\alpha x}, e^{\alpha x} \sin(\beta x), P_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

Poznámka C.6 Jestliže pro pravou stranu rovnice (23) platí

$$q(x) = q_1(x) + ... + q_r(x),$$

kde každá z funkcí $q_1, ..., q_r$ má speciální tvar (33), potom postupujeme tak, že postupně najdeme partikulární řešení $\varphi_{p1}, ..., \varphi_{pr}$ diferenciálních rovnic, které vzniknou z rovnice (23), když na její pravou stranu píšeme místo $q(x)$ výrazy $q_1(x), ..., q_r(x)$. Partikulární řešení φ_p rovnice (23) pak vypočteme takto:

$$\varphi_p(x) = \varphi_{p1}(x) + ... + \varphi_{pr}(x).$$